Math. P. 244^n. Jüngling

Sammlung

von

Aufgaben und Lehrsätzen

[illegible]

Geometrie, Stereometrie

und

Trigonometrie

[illegible]

Grundzügen der neueren Geometrie

[illegible]

Sammlung
von
Aufgaben und Lehrsätzen
aus
Geometrie, Stereometrie
und
Trigonometrie,
nebst den
Grundzügen der neueren Geometrie

von

G. Jüngling,

Lehrer der Mathematik an der K. Landwirthschafts- und Gewerbschule I. Classe
in Erlangen.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Mit drei Figurentafeln.

Regensburg, 1848.
Verlag von G. Joseph Manz.

44. B.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Vorliegende Sammlung ist für Schüler zum Gebrauche in Schulen und zu Privatübungen bestimmt, und man glaubte bei ihrer Verabfassung auch die Elemente der sogenannten neuern Geometrie nicht ganz unberücksichtigt lassen zu dürfen. Wenn die ersten Mathematiker es nicht verschmähen, den Erzeugnissen ihres Scharfsinnes eine möglichst einfache Grundlage zu geben, so ist es um so mehr Pflicht des Mathematiklehrers, das Dargebotene dankbar anzunehmen und, so viel möglich, auf den Schulboden zu verpflanzen. Ich habe meistens solche Sätze und Aufgaben zu geben versucht, welche wegen ihrer Einfachheit oder Eleganz den Schüler ansprechen müssen; indem ich aus Erfahrung weiß, daß allzugekünstelte Aufgaben, wenn sie auch vom Schüler gelös't wurden, nicht immer Freude, sondern, so zu sagen, ein Gefühl von Übersättigung verursachten, eine Klippe, welche man bei dem Unterrichte sehr leicht übersehen kann, welche aber durch ihre Folgen sich leicht wahrnehmen läßt.

Ob ich in diesem Betrachte die rechte Mitte getroffen habe, mögen Lehrer beurtheilen. In Bezug auf die Grundzüge der Geometrie der Lage habe ich die Lehre von den Verhältnissen benützt, und zwar deswegen, weil sie mir für den ersten Unterricht die passendste schien, wenn man nemlich den Unterricht, wie meist noch geschieht, mit den Elementen des Euclides beginnt.

Möchte diese Sammlung freundlich aufgenommen und mit Nachsicht beurtheilt werden.

Erlangen, im November 1847.

G. J.

I.

Ebene Geometrie.

I. Vorübungen und Lehrsätze.

1. Verschiedene Lagen der geraden Linien. Zwei Gerade schneiden sich, oder sind parallel. Für drei Gerade gibt es drei verschiedene Lagen, nemlich: a) dieselben sind zu einander sämmtlich parallel; b) zwei derselben sind zu einander parallel und werden von der dritten geschnitten; c) alle drei schneiden sich gegenseitig. (Auf die Anzahl der Durchschnittspunkte wird hier keine Rücksicht genommen.) Um die Anzahl der verschiedenen Lagen für n Gerade zu bestimmen, bilde man alle möglichen Verbindungen der Zahlen, deren Summe der Zahl n gleich ist. Die Anzahl derselben ist der Anzahl der verschiedenen Lagen von n Geraden gleich. Für 6 Linien z. B. erhält man folgende Summanden, welche die Summe 6 geben: (6); (5, 1); (4, 2); (4, 1, 1); (3, 3); (3, 2, 1); (3, 1, 1, 1); (2, 2, 2); (2, 2, 1, 1); (2, 1, 1, 1, 1); (1, 1, 1, 1, 1, 1). Es gibt daher für 6 Gerade 11 verschiedene Lagen. Was die Ausdrücke (6) (5, 1) u. s. w. bedeuten, ist für sich klar.

2. Es mögen sich mehre Gerade, und zwar nicht drei in einem Punkte durchschneiden; die Anzahl der Durchschnittspunkte zu bestimmen.

Antw. Zwei Gerade geben 1, drei Gerade geben $1 + 2$, vier geben $1 + 2 + 3$ u. s. w. Durchschnittspunkte; folglich n Gerade geben $\left(1 + 2 + \ldots . + (n - 1)\right) = \frac{n\,(n - 1)}{2}$ Durchschnitte. — Sind unter n Geraden m derselben parallel zu einander, so finden sich $\frac{n\,(n - 1)}{2} - \frac{m\,(m - 1)}{2}$ Punkte.

3. Wenn mehre Gerade sich so durchschneiden, daß nur je zwei derselben durch einen Punkt gehen, die Anzahl der (begrenzten und unbegrenzten) Räume zu finden, in welche die Ebene zerlegt wird.

Antw. Jede Gerade theilt die unbegrenzte Ebene in zwei Theile; zwei Gerade geben $2 + 2$, drei Gerade geben $2 + 2 + 3$, vier geben $2 + 2 + 3 + 4$ und allgemein n Gerade geben $2 + \frac{(n - 1)\,(n + 2)}{2}$ ebene Räume.

4. Wie viel geschlossene Räume erhält man für n Gerade, wenn sich keine drei derselben in einem und demselben Punkte durchschneiden?

Antw. Weil durch jede Gerade die Anzahl der äußern unbegrenzten Räume um zwei vermehrt wird, so erhält man $\frac{(n - 1)\,(n + 2)}{2} + 2 - 2\,n = \frac{(n - 1)\,(n - 2)}{2}$ begrenzte Räume für n Gerade.

Anmerkung. Weil zwei Parallelen 3 Räume, drei Parallelen 4 Räume u. s. w. bilden, so erhält man für n Gerade, worunter m zu einander parallel sind, $\frac{(n - 1)\,(n + 2)}{2} - \frac{(m - 1)\,(m + 2)}{2} + (m + 1)$ Räume. Es dürfen

aber auch hier, wie oben bemerkt ist, nicht drei oder mehre Gerade durch denselben Punkt gehen.

5. Wenn n Punkte, von welchen blos zwei (nicht drei oder mehre) in derselben geraden Linie liegen, gegeben sind; die Anzahl der verschiedenen Linien, welche durch die gegebenen Punkte gelegt werden können, zu bestimmen.

Antw. Durch zwei Punkte kann 1 Gerade, durch drei Punkte können 1 + 2, durch vier Punkte 1 + 2 + 3 u. s. f., durch n Punkte $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$ Gerade gelegt werden.

6. Sollen n Punkte überhaupt nur zu je zweien so verbunden werden, daß man von einem Punkte als Anfangspunkte zu allen andern gelangen kann, ohne wieder zum Anfangspunkte zurückzukehren, so sind $n - 1$ Gerade nöthig.

7. In jeder vollständig begrenzten Figur ist die Anzahl der Seiten der Anzahl der Winkel oder Ecken gleich; (wenn nemlich keine Seite über ihre zugehörigen Eckpunkte hinaus verlängert wird und keine Seite eine andere nichtanliegende durchschneidet. Im letztern Fall muß die gegebene Figur als zusammengesetzt aus mehren andern geschlossenen Figuren betrachtet werden.)

8. In jeder n seitigen Figur ist die Anzahl der Diagonalen $= \frac{n(n-3)}{2}$.

Denn aus jeder Ecke gehen $n - 3$ Diagonalen, folglich aus n Ecken $n(n - 3)$; weil aber hier jede Diagonale zweimal gezählt ist, so erhält man obige Anzahl. (Auch hier darf keine Seite der Figur bis zum Durchschnitte mit einer andern nichtanliegenden Seite verlängert werden.)

9. Wie viel Diagonalen hat das 9=, 14=, 17 Eck?

10. Welches Vieleck hat 189 Diagonalen?

Antw. Durch Auflösung der quadratischen Gleichung $\frac{n(n-3)}{2} = 189$ findet man $n = 21$.

11. In wie viel Dreiecke läßt sich jede n seitige Figur durch Diagonalen zerlegen?

Antw. In n — 2 Dreiecke.

12. Die Summe der Winkel jedes n Ecks beträgt (nach Nr. 11) 2 (n — 2) Rechte.

13. Ein jedes n Eck kann nicht mehr als n — 3 convexe oder einspringende Winkel haben.

Beweis. Wollte man annehmen, das Vieleck enthalte mehr, z. B. n — 2 convexe Winkel, so würde die Summe derselben allein schon mehr als 2 (n — 2) Rechte betragen, (weil jeder einzelne convexe Winkel schon größer als zwei Rechte ist) was nach Nr. 12 nicht sein kann.

14. Die Summe der äußern Winkel beträgt immer 4 Rechte. (Wenn das Vieleck einspringende Winkel hat, so sind die zugehörigen Außenwinkel negativ zu nehmen.)

15. Man soll beweisen, daß die Summe der Winkel in der fünfeckigen Sternfigur (Fig. 1), welche unter dem Namen Drudenfuß bekannt ist, zwei Rechte beträgt.

16. Wie viel betragen die Winkel einer analogen 8=, 11eckigen Sternfigur?

Antw. Im 8eckigen Sterne beträgt die Summe der Winkel 4 Rechte, im 11eckigen 6 Rechte u. s. w.

17. Wenn die Schenkel zweier Winkel einstimmig oder entgegengesetzt parallel sind, so sind die Winkel einander gleich; sind aber zwei Schenkel einstimmig und die beiden andern entgegengesetzt parallel, so ist der eine ein Supplementswinkel des andern.

18. Fällt man von einem Punkte auf die beiden Schenkel eines Winkels Lothe, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel entweder das Supplement des gegebenen Winkels oder diesem gleich, je nachdem der Punkt zwischen den Schenkeln oder außerhalb derselben liegt.

19. Halbirt man im gleichschenkeligen Dreiecke den äußern

Winkel an der Spitze, so ist die Halbirungslinie parallel zur Grundlinie.

20. Wenn man im rechtwinkeligen Dreiecke auf der Hypotenuse von ihren Endpunkten aus die anliegenden Katheten abschneidet, und die Endpunkte dieser Abschnitte mit der Spitze des rechten Winkels verbindet, so ist der Winkel, welchen die beiden Verbindungslinien einschließen, der Hälfte des rechten Winkels gleich. Wie ändert sich dieser Satz für ein beliebiges Dreieck? gleich der halben Summe der beiden kleineren Δ winkel

21. Wenn man den Winkel eines Dreiecks halbirt und aus der Spitze desselben Winkels eine Senkrechte auf die Gegenseite fällt, so ist der Winkel, welchen das Loth und die Halbirungslinie bilden, dem halben Unterschiede der Winkel an der Gegenseite gleich.

22. Halbirt man zwei Nebenwinkel, so schließen die Halbirungslinien einen rechten Winkel ein.

---

23. Wenn man von einem beliebigen Punkte auf die drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks Lothe fällt, so ist die Summe (oder Differenz) dieser Lothe eine constante Größe. Bezeichnet man diese Lothe mit p, p', p'' und die Höhe des Dreiecks mit **H**, so ist

1) $p + p' + p'' = H$, wenn der gegebene Punkt im Dreiecke liegt;

2) $p' + p'' - p = H$, wenn der Punkt außerhalb des Dreiecks, zwischen den Schenkeln des Winkels liegt, auf dessen Gegenseite das Loth p gefällt ist.

3) $p - p' - p'' = H$, wenn der Punkt im Scheitelwinkel desjenigen Winkels liegt, auf dessen Gegenseite das Loth p gefällt ist.

Beweis. ad 1) Fig. 2. Es sei **P** der gegebene Punkt und

Pa, Pb, Pc die Lothe auf den Seiten **BC, AC, AB** und bezüglich mit p, p', p'' bezeichnet. Ziehe durch **P** die **DE, PF, FG** bezüglich parallel mit **BC, AC, BC** und fälle die Lothe **FS, FL** auf **DE, AC** und die Höhe **AO** $=$ **H** des Dreiecks auf **BC**. — Es ist **Pa** $= p =$ **NO**, und weil $\triangle$ **PFE** gleichseitig ist, so ist **Pc** $= p'' =$ **FS** $=$ **MN**. Aus demselben Grunde ist **Pb** $= p' =$ **FL** $=$ **AM**, folglich $p + p' + p'' =$ **AO** $=$ **H**.

ad 2) Fig. 3. Ziehe durch **P** mit **BC** die Parallele **DE**. Fälle von **B** und **E** die Senkrechten **BO, EF** auf **AD** und **BN** auf **DE**; ziehe **BM** mit **AD** parallel. Es ist **BO** $=$ **H** $=$ **EF** $-$ **EG**; weil nun $\triangle$ **DEA** ein gleichseitiges Dreieck ist, so ist nach dem Vorhergehenden **Pb** $+$ **Pc** $= p' + p'' =$ **EF**, ebenso ist auch **Pa** $= p =$ **BN** $=$ **EG**; folglich **H** $= p' + p'' - p$.

ad 3) Fig. 4. Ziehe durch den gegebenen Punkt **P** die Gerade **DE** mit **BC** parallel, durch **A** die **FG** senkrecht auf **BC** oder **DE** und **AM** mit **DE** parallel. Es ist **AG** $=$ **H** $=$ **Pa** $-$ **FA**. Weil nun **Pa** $= p$ und **FA** $=$ **Pb** $+$ **Pc** $= p' + p''$ ist, so ist **H** $= p - p' - p''$.

24. Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele mit einer andern Seite, so ist die Parallele die Hälfte der letztern Seite.

25. Verbindet man die Mitten der drei Seiten eines Dreiecks, so wird dasselbe in vier congruente Dreiecke zerlegt.

26. Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich. (Gerwien's Beweis durch Congruenz.)

Beweis. Fig. 5. Man lege die gegebenen Dreiecke **ABC, ABD** mit den gleichen Grundlinien **AB, AB** so an einander, daß die Spitzen **C, D** auf verschiedene Seiten von **AB** fallen. Zieht man **CD**, welche von **AB** in **M** durch-

schnitten wird, so ist, weil die Höhen aus **C** und **D** auf **AB** einander gleich sind, **CM** = **DM**. Verbindet man nun den Punkt **M** mit den Halbirungspunkten **E**, **F**, **G**, **H**, so ist **ME** mit **DA**, **MF** mit **DB**, **MG** mit **BC** und **MH** mit **CA** parallel. Es ist daher △ **AEM** $\cong$ **MHA**, △ **CEM** $\cong$ △ **MHD**; ebenso sind die Dreiecke **CMF** und **FMB** bezüglich den Dreiecken **MDG** und **GBM** congruent; d. h. die gegebenen Dreiecke sind einander gleich.

Aus diesem Beweise geht augenscheinlich hervor, daß das Dreieck **ABC** so zerlegt werden kann, daß man durch bloses Verschieben der einzelnen Theile das andere Dreieck **ABD** bilden kann.

27. Alle Vierecke, deren Diagonalen einander gleich sind und gleiche Winkel bilden, sind einander gleich.

Beweis. Fig. 6. Es ist zu beweisen, daß die Vierecke **ABCD** und **AECF**, in welchen die Diagonale **AC** gemeinschaftlich, **EF** = **BD** und diese beiden Diagonalen zugleich parallel sind, einander dem Inhalte nach gleich sind. Man ziehe durch **A** die **HG** mit **EF** oder **BD** parallel, fälle aus **C** auf **HG** die **CN** senkrecht, welche die **BD** in **M** und die **EF** in **O** schneidet, ebenso aus **A** auf **BD** die Senkrechte **AQ**, welche **EF** in **P** schneidet. Das Viereck **ABCD** besteht aus zwei Dreiecken **ABD** und **BCD**, welche die gleiche Grundlinie **BD** und die Höhen **AQ** und **CM** haben, und ist daher einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie **BD** und dessen Höhe der Summe der Höhen **AQ** und **CM** oder der Senkrechten **CN** gleich ist. Ebenso ist das Viereck **AECF** einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie **EF** oder **BD** und dessen Höhe der Summe der Höhen **AP** und **CO** oder ebenfalls der Senkrechten **CN** gleich ist. Da nun diese letzteren Dreiecke gleiche Grundlinie **BD** und gleiche Höhen **CN** haben, so sind sie und folglich auch die Vierecke **ABCD** und **AECF** einander gleich.

Anmerkung. Hieraus folgt, daß, wenn man die eine Diagonale eines beliebigen Vierecks mit ihrer ersten Richtung parallel bewegt, jedes neue Viereck, welches entsteht, wenn man die Endpunkte dieser Diagonale mit den Endpunkten der andern verbindet, immer dem gegebenen Vierecke selbst gleich ist.

28. Im Dreiecke durchschneiden sich folgende Linien immer in einem Punkte:

1) die Senkrechten, welche in den Halbirungspunkten der drei Seiten errichtet werden (Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises);
2) die Halbirungslinien der drei Winkel (Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises);
3) die Geraden, welche aus den Winkelspitzen nach den Mitten der Gegenseiten gezogen werden.
4) Die Senkrechten aus den Winkelspitzen auf die Gegenseiten (die drei Höhen). (Vergl. 87.)

Beweis. ad 1) Fig. 7. Errichtet man in den Mitten D und E der Seiten AB und BC Senkrechte, welche sich in O durchschneiden, so ist zu beweisen, daß, wenn man den Halbirungspunkt F der Seite AC mit O verbindet, OF auf AC senkrecht steht. Man findet leicht, daß AO = BO = CO ist, und hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke AOF und COF, woraus sich die Behauptung ergibt.

ad 2) Fig. 7. Es seien AO und BO die Halbirungslinien der Winkel BAC und ABC, welche sich in O durchschneiden. Zieht man CO, so ist zu beweisen, daß CO den Winkel BCA halbirt. Man fälle aus O auf AB, BC, CA die Senkrechten OD, OE, OF, so ergibt sich die Congruenz der Dreiecke COE, COF u. s. w.

Es gibt im Allgemeinen 4 Punkte, welche von den drei Dreiecksseiten gleichweit abstehen, und man erhält dieselben, wenn man sämmtliche äußere und innere Winkel

des Dreiecks halbirt. Auch von diesen Halbirungslinien gilt der Satz: daß sich immer drei derselben in einem Punkte durchschneiden.

ad 3) Fig. 8. Man ziehe aus den Winkelspitzen **A**, **B** nach den Mitten der Gegenseiten die Geraden **Aa**, **Bb**, welche sich in **O** schneiden, so muß bewiesen werden, daß die Linie **CO** verlängert die Seite **AB** in **c** halbirt. — Die Dreiecke **ACa**, **CBb** sind als Hälften des Dreiecks **ABC** einander gleich, also auch die Dreiecke, **AOb**, **BOa** und hieraus folgt die Gleichheit der Dreiecke **AOC** und **BOC**. Da nun letztere dieselbe Grundlinie **CO** haben, so müssen auch ihre Höhen, d. h. die Senkrechten aus **A** und **B** auf **Cc** gleich sein. Dieselben gleichen Höhen gehören aber auch den Dreiecken **AOc** und **BOc** zu, welche zugleich dieselbe Grundlinie **Oc** haben; woraus folgt, daß diese Dreiecke einander gleich sind. Betrachtet man aber **O** als ihre gemeinschaftliche Spitze, so müssen ihre Grundlinien **Ac**, **Bc** gleich sein.

ad 4) Fig. 9. Es seien **AM**, **BN**, **CP** die Höhen aus den Ecken **A**, **B**, **C** auf die Gegenseiten. Man ziehe durch **A**, **B**, **C** die Parallelen **DE**, **DF**, **FE** mit den Seiten **BC**, **AC**, **AB**, so kann leicht gezeigt werden, daß **A**, **B**, **C** die Mitten der Seiten des Dreiecks **DEF** sind. Weil ferner **AM**, **BN**, **CP** auf den Seiten **BC**, **AC**, **AB** senkrecht stehen, so bilden sie auch mit den Seiten **DE**, **DF**, **FE** des Dreiecks **DEF** rechte Winkel. Die Lothe im Dreiecke **ABC** sind daher nichts anderes, als die Senkrechten, welche in den Mitten der Seiten des Dreiecks **DEF** errichtet sind. Letztere schneiden sich aber nach dem Vorhergehenden in einem Punkte.

29. Fällt man im Dreiecke die drei Höhen, so lassen sich folgende Sätze aufstellen:

1) Legt man durch je zwei Ecken und den Durchschnittspunkt

der Höhen Kreise, so sind diese unter sich und dem um das Dreieck beschriebenen Kreise gleich.

2) Verbindet man die Fußpunkte der Höhen, so entsteht ein Dreieck, dessen Winkel von den Höhen halbirt werden.

3) Legt man durch die Ecken dieses einbeschriebenen Dreiecks einen Kreis, so halbirt derselbe jede Seite des gegebenen Dreiecks.

4) Dieser letztere Kreis geht zugleich durch die Mitten derjenigen Theile der Höhen des gegebenen Dreiecks, welche zwischen den Ecken und dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Höhen enthalten sind.

5) Der Halbmesser dieses Kreises ist die Hälfte des Halbmessers des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises.

Beweis. ad 1) Fig. 10. Um das Dreieck **ABC** sei ein Kreis beschrieben und **O** der Durchschnittspunkt der Höhen **AD**, **BE**, **CF**. Verlängere **AD** bis zum Durchschnitte **G** mit dem Kreise. Es ist W. **BCG** = **BAD** = **BCO** und **CBG** = **CAD** = **CBO**. Weil also W. **BCO** = **BCG** und **CBO** = **CBG**, so sind die Dreiecke **CBG** und **CBO** congruent. Da nun um ein Dreieck nur ein einziger Kreis gelegt werden kann, so muß der Kreis, welcher um das Dreieck **CBO** beschrieben ist, dem Kreise, welcher um das Dreieck **CBG** beschrieben ist, d. h. dem Kreise **ABC** gleich sein. Auf dieselbe Weise wird der Beweis für die Dreiecke **AOC**, **AOB** geführt.

ad 2) Weil in dem Vierecke **BFOD** die Gegenwinkel **BFO**, **BDO** rechte Winkel sind, so läßt sich um das Viereck **BFOD** ein Kreis beschreiben; daher ist auch W. **FBO** = W. **FDO**. Ebenso läßt sich um das Viereck **DOEC** ein Kreis beschreiben, weswegen W. **ECO** = W. **EDO** ist. Es ist aber W. **ECO** = W. **FBO**, folglich **EDO** = **FDO**; d. h. der Winkel **FDE** ist durch die Höhe **AD** halbirt. Auf dieselbe Weise wird der Beweis in Bezug auf die Winkel **DFE**, **DEF** geführt.

ad 3) Weil das Dreieck **BFC** rechtwinkelig ist, so liegt der

Mittelpunkt des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises im Halbirungspunkt M der Seite BC. Es ist daher das Dreieck MFC gleichschenkelig, folglich W. DMF = 2 MCF. Es ist aber nach dem Vorhergehenden W. DEF = 2 MCF, also W. DMF = DEF. Da nun die Schenkel dieser Winkel durch die Punkte D und F gehen, so liegt der Punkt M, d. h. der Halbirungspunkt der Seite BC in dem Kreise, welcher um das Dreieck DEF beschrieben ist. Dasselbe gilt für die Halbirungspunkte der beiden andern Seiten.

ad 4) Diese Behauptung läßt sich einfach durch Proportionen rechtfertigen. Es sei nemlich L der Durchschnitt des Kreises, welcher um das Dreieck DEF gelegt ist, mit der Höhe BE. Man hat dann BL : BN = BF : BE also weil BN = ½AB ist, BL . BE = ½AB . BF. Weil aber auch die Dreiecke BOF, BAE ähnlich sind, so ist BO : BF = AB : BE folglich AB . BF = BO . BE, woraus, in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung, hervorgeht, daß BL = ½BO. Dasselbe gilt für die Durchschnittspunkte des Kreises mit den Linien AO und CO.

ad 5) Weil der Kreis, welcher um das Dreieck DEF gelegt ist, auch dem Dreiecke DNJ umbeschrieben, und letzteres Dreieck der vierte Theil des Dreiecks ACB und demselben ähnlich ist, so muß der Halbmesser des Kreises DNJ die Hälfte des Halbmessers vom Kreise ACB sein.

Anmerkung. Aus der Betrachtung der Figur ergeben sich noch manche andere interessante Sätze, z. B.:

Der einem Dreiecke umbeschriebene Kreis geht durch die Mitten der Geraden, welche die Mittelpunkte der äußern Berührungskreise verbinden.

Denn die Punkte A, B, C sind die genannten Mittelpunkte in Bezug auf das Dreieck DFE.

Der Durchschnitt der drei Höhen ist zugleich der Mittelpunkt des dem Dreiecke DEF einbeschriebenen Kreises.

30. a) Der Durchschnittspunkt der drei Höhen, der Mittellinien (Schwerpunkt) und der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises eines Dreiecks liegen in einer Geraden, und es ist der Durchschnitt der Mittellinien vom Mittelpunkt des Kreises halb so weit entfernt, als vom Durchschnitt der Höhen.

Beweis. Fig. 11. Es sei **O** der Durchschnitt der Höhen, **N** der Durchschnitt der Mittellinien. Ziehe **ON** und verlängere **ON** bis **M**, so daß **NM** $= \frac{1}{2}$**ON**; dann ist zu beweisen, daß **M** der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises ist. Zieht man **MD** und **ME**, so ist, weil **CN : ND = 2 : 1** (der Durchschnitt der Mittellinien theilt jede Mittellinie so, daß das Stück zwischen der Spitze des Dreiecks und dem Durchschnittspunkt noch einmal so groß ist, als das andere Stück) und **ON : NM = 2 : 1**, auch **CN : ND = ON : NM**. Weil nun auch W. **CNO** = W. **DNM** ist, so sind die Dreiecke **CNO** und **DNM** ähnlich, folglich auch W. **NCO** = W. **NDM**, d. h. es ist **CO** mit **MD** parallel. Es steht daher **MD** auf **AB** senkrecht. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß **ME** auf **BC** senkrecht steht; woraus folgt, daß der Punkt **M** der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises ist.

b) Auf derselben Geraden liegt auch der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Mitten der Seiten oder durch die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks gelegt ist, und zwar in der Mitte zwischen dem Höhendurchschnitte und dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises.

Denn es sei **G** die Mitte von **CO**, so geht dieser Kreis durch die Punkte **G, F, D** und weil W. **GFD** ein rechter Winkel ist, so ist **GD** ein Durchmesser desselben. Wenn nun **GD** die **OM** in **P** schneidet, so folgt aus den Dreiecken **DPM** und **GPO**, daß **P** in der Mitte der Linie **OM** und der Linie **GD** liegt. (Es liegen daher die Punkte **O, P, N, M** harmonisch.)

31. Zieht man durch den Durchschnittspunkt der drei Mittellinien eines Dreiecks eine beliebige Gerade und fällt von den Ecken des Dreiecks auf dieselbe Lothe, so ist die Summe der Lothe, welche auf der einen Seite der Geraden liegen, gleich dem auf der andern Seite liegenden Lothe.

Beweis. Fig. 12. Es sei **O** der Durchschnitt der Mittellinien und **PN** beliebig durch **O** gezogen. Es seien von **A**, **B**, **C** auf **PN** die Lothe **AP**, **BN**, **CM** gefällt, dann ist $AP + BN = CM$. — Verlängere **OD** bis **E**, so daß $DE = OD$, ziehe **CE**, fälle von **E** auf **PN** die Senkrechte **EG** und vollende das Rechteck **CMGH**. Das Dreieck **CED** ist dem Dreiecke **BOD** congruent, folglich **CE** und **BO** gleich und parallel. Ebenso ist das Dreieck $CEH \cong OBN$, folglich $EH = BN$. Aus gleichen Gründen ist $EG = AP$. Im Rechtecke **CMGH** ist daher $EH + EG$ d. h. $BN + AP = CM$.

32. Sind in einem Parallelogramme aus einer Winkelspitze nach den Mitten der zwei Gegenseiten Gerade gezogen, so theilen dieselben die Diagonale, welche nicht durch jene Winkelspitze geht, in drei gleiche Theile.

Beweis. Fig. 13. Es seien aus der Winkelspitze **A** nach den Mitten der Gegenseiten **BC** und **CD** die Geraden **Aa**, **Ab** gezogen, so durchschneiden diese die Diagonale **BD** in den Punkten **m** und **n**. Denkt man sich **AC** gezogen, welche von **BD** in **O** halbirt wird, so sind **Aa** und **BO** Mittellinien im Dreiecke **ABC**, weshalb $Bm = \frac{2}{3}\,BO = \frac{1}{3}\,BD$ ist. Gleiches gilt von der Linie **Dn** im Dreiecke **ACD**, weshalb **BD** in **m** und **n** in drei gleiche Theile getheilt ist.

33. Es sei **ABCD** ein Parallelogramm und **O** ein außerhalb desselben liegender Punkt. Werden die Linien **OA**, **OB**, **OC**, **OD** gezogen, so ist immer in Bezug auf die Flächen der Dreiecke: $BOD - BOA = COA - COD$.

Beweis. Fig. 14. Das Fünfeck **ABOCD** läßt sich einmal

in die Dreiecke ABD, BOD, COD und wiederum in die Dreiecke ACD, ACO und ABO zerlegen, woraus der Satz folgt.

Wie ändert sich diese Relation, wenn der Punkt O in das Parallelogramm oder auf eine Seite oder auf die Verlängerung einer Seite fällt?

34. In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

35. Die Summen der Quadrate der Entfernungen eines beliebigen Punktes von je zwei gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks sind einander gleich.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt eine Parallele mit einer Seite des Rechtecks, so ergibt sich der Satz mit Hülfe des pyth. Lehrsatzes.

36. Wenn im Dreiecke eine Mittellinie gezogen ist, so ist die Summe der Quadrate der Mittellinie und der halben Dreiecksseite, an welche die Mittellinie gezogen ist, gleich der halben Summe der Quadrate der beiden andern Seiten.

Weil das Dreieck als die Hälfte eines Parallelogramms betrachtet werden kann, so ergibt sich der Beweis aus Nr. 34.

37. In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen, nebst dem vierfachen Quadrate der Linie, welche die Mitten der Diagonalen verbindet. (Eulerscher Satz.)

Beweis. Fig. 15. Es seien AC, BD die Diagonalen des Vierecks ABCD, M und N die Halbirungspunkte derselben. Ziehe MN, AN, CN, BM, DM. — Weil DM, BM die Mittellinien der Dreiecke ADC und ABC sind, so ist nach dem Vorhergehenden

$$AD^2 + DC^2 = 2DM^2 + 2AM^2 = 2DM^2 + \tfrac{1}{2}AC^2$$

und

$$AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + 2AM^2 = 2BM^2 + \tfrac{1}{2}AC^2$$

folglich

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + 2MD^2 + 2BM^2$$

Im Dreiecke BMD ist MN eine Mittellinie, und daher

$$DM^2 + BM^2 = 2MN^2 + \tfrac{1}{2}BD^2,$$

folglich durch Substitution

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

38. Wenn man im Vierecke die Mitten der vier Seiten durch Gerade verbindet, so entsteht ein Parallelogramm, welches die Hälfte des Vierecks ist.

Beweis. Fig. 16. Man ziehe im Vierecke ABCD eine Diagonale AC, so sind MN und PO mit AC parallel und der Hälfte derselben gleich, folglich ist MNOP ein Parallelogramm.

Auch ist MNOP $= \frac{1}{2}$ ABCD.

39. Die Summe der Quadrate der Diagonalen ist der zweifachen Summe der Linien gleich, welche die Mitten der Gegenseiten verbinden.

Beweis. Fig. 16. Es sind die Verbindungslinien MO, NP der Mitten der Seiten die Diagonalen des einbeschriebenen Parallelogramms. Weil nun $MN = \frac{1}{2}AC$, $NO = \frac{1}{2}BD$ und $2MN^2 + 2NO^2 = MO^2 + NP^2$, so ist sogleich $MO^2 + NP^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$.

40. In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der vier Seiten und der Diagonalen gleich der vierfachen Summe der Quadrate der Linien, welche die Mitten je zweier Gegenseiten und die Mitten der beiden Diagonalen verbinden.

41. In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten gleich der doppelten Summe der Quadrate der Linien, welche die Mitten der beiden andern Seiten und die Mitten der beiden Diagonalen verbinden.

42. Bezeichnet man im Rhombus ABCD die Diagonalen AC und BD mit D, d, so ist für einen beliebigen Punkt E

$$AE^2 + EC^2 - \frac{1}{2}D^2 = BE^2 + DE^2 - \frac{1}{2}d^2.$$

43. In jedem gleichschenkligen Dreiecke ist, wenn man aus der Spitze eine beliebige Gerade bis an die Grundlinie zieht, das Quadrat dieser Transversale dem Quadrate eines Schenkels weniger dem Rechtecke aus den Abschnitten der Grundlinie gleich. — Trifft die Transversale die Verlängerung der Grundlinie, so ist das Quadrat der Transversale der Summe der letztern Größen gleich.

44. In jedem Paralleltrapeze ist die Linie, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet, die Hälfte der Summe der parallelen Seiten.

45. Ist durch den Durchschnittspunkt der Linien, welche die Mitten je zweier Gegenseiten eines Vierecks verbinden, eine beliebige Gerade gezogen, so ist die Summe der Lothe, welche aus den auf einer Seite der Geraden liegenden Winkelspitzen des Vierecks auf letztere gefällt sind, gleich der Summe der Lothe, welche auf der andern Seite liegen.

Beweis. Fig. 17. Es sei EFGH das dem Vierecke einbeschriebene Parallelogramm, O der Durchschnitt der Diagonalen EG und FH; MQ sei beliebig durch O gezogen. Es ist zu beweisen, daß $AN + BM = CP + DQ$. — Fälle aus E und G die Lothe Ee und Gg auf MQ. Es erhellet sogleich, daß $Ee = Gg$ ist. Weil aber $2Ee = BM + AN$ und $2Gg = CP + DQ$, so ist die Behauptung erwiesen.

Wie läßt sich auf diese Weise der Satz Nr. 31 erweisen?

---

46. In jedem Vielecke von gerader Seitenzahl, welches einem Kreise einbeschrieben (centrisch nach den Ecken) ist, ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w.

47. In jedem Vielecke von gerader Seitenzahl, welches einem Kreise umbeschrieben (centrisch nach den Seiten) ist, ist die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w.

Weil die Tangenten, welche aus einem Punkte an den Kreis gezogen sind, einander gleich sind, so ergibt sich der Satz leicht.

48. Zwei Kreise durchschneiden sich. Durch den einen Durchschnittspunkt seien beliebig viele Gerade bis an beide Kreise gezogen und ihre Endpunkte mit dem nächsten Durchschnittspunkte der Kreise verbunden, so sind alle hierdurch entstandenen Dreiecke gleichwinkelig (ähnlich).

Beweis. Fig. 18. Es sei **BCD** ein solches Dreieck. Man ziehe **AD**. Für jede Lage des Punktes **B** auf dem Umfange **ABD** bleibt der Winkel **ABD** constant. Dasselbe gilt für den Winkel **ACD** im zweiten Kreise, woraus der Satz folgt.

Liegt der Mittelpunkt des einen Kreises auf dem Umfange des andern, (sind also auch die Kreise einander gleich) so ist das Dreieck **BCD** gleichseitig.

Was vom Dreiecke **BCD** gilt, ist auch in Bezug auf das Dreieck **B′C′D** richtig, von welchem die Verlängerung der Seite **B′C′** durch den Punkt **A** geht.

49. Zieht man durch den Berührungspunkt zweier Kreise eine Gerade, so schneidet diese in beiden Kreisen Bogen ab, welche gleiche Winkel fassen; und zieht man folglich zwei Gerade durch den Berührungspunkt, so sind die Sehnen, welche die Durchschnitte der Geraden mit den Kreisen verbinden, zu einander parallel.

Beweis. Fig. 19. Man ziehe durch den Berührungspunkt **A** beider Kreise eine Tangente **MA**, so ist W. **MAB** = W. **ACB** = W. **AED**; daher auch **BC** mit **DE** parallel.

50. Es berühre (Fig. 20) ein Kreis, dessen Mittelpunkt **O**

ist, einen Kreis, dessen Mittelpunkt M ist, und zugleich eine Gerade XY in D. Es seien durch die Mittelpunkte M und O die Lothe AF und CD gefällt, so gehen die Linien AD und FC durch den Berührungspunkt E beider Kreise.

Beweis. Wird die Centrale MO gezogen, welche durch den Berührungspunkt geht, und AE, ED, FE, EC, so findet man leicht, daß die Winkel MEA und DEO gleich sind, woraus der Satz hervorgeht.

51. Wenn zwei Gerade mit einander einen Winkel, welcher 120° beträgt, bilden, und man beschreibt gleichseitige Dreiecke, von welchen zwei Winkelspitzen in den beiden Geraden liegen, so liegt die dritte Winkelspitze in einer Geraden, welche den gegebenen Winkel halbirt.

Beweis. Fig. 21. Über den Geraden MN, deren Endpunkte im gegebenen Winkel liegen, sei das gleichseitige Dreieck MNO beschrieben und AO gezogen, so ist MANO ein Viereck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt. Es ist daher W. NAO = W. NMO = 60°. Es halbirt daher die Gerade AO den gegebenen Winkel und AO ist der Ort der Spitze aller gleichseitigen Dreiecke, welche im gegebenen Winkel CAB liegen.

52. Wenn überhaupt zwischen den Schenkeln eines Winkels ähnliche Dreiecke, deren Winkel an der Spitze dem Nebenwinkel des gegebenen Winkels gleich sind, so beschrieben werden, daß homologe Eckpunkte derselben in einem und demselben Schenkel liegen, so ist der Ort des dritten Eckpunktes eine Gerade, welche durch die Spitze des gegebenen Winkels geht und mit dem einen Schenkel einen Winkel bildet, welcher den Dreieckswinkeln am andern Schenkel gleich ist.

Der Beweis wird wie vorher geführt.

53. Wenn von zwei Peripheriewinkeln jeder gleiche Schenkel hat und ein Schenkel des einen Winkels mit einem Schenkel des andern parallel ist, so ist der Bogen zwischen den End-

punkten der nicht parallelen Schenkel das Dreifache des Bogens zwischen den Winkelspitzen.

Beweis. Fig. 22. Es sei AB = AC, DE = DF und AB mit DE parallel. Weil Bogen AD = Bogen BE, so ist Bogen DE — Bogen AB = 2 Bogen AD. Ebenso ist Bogen DF — Bogen AC = Bogen CF — Bogen AD, woraus Bogen CF = 3 Bogen AD folgt.

54. Wenn zwei Tangenten, welche von einem Punkte A an einen Kreis gezogen sind, von einer dritten Tangente durchschnitten werden, und man verbindet die Durchschnittspunkte derselben mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ist der hierdurch gebildete Winkel von constanter Größe, nemlich gleich $(90 + \frac{1}{2}\alpha)$ oder $(90 - \frac{1}{2}\alpha)$, wo α den Winkel bezeichnet, welchen die beiden erstern Tangenten in A mit einander bilden, je nachdem der Kreis von den drei Tangenten eingeschlossen wird, oder nicht.

Beweis. Fig. 23. Wird der Kreis von den drei Tangenten AB, AC, BC eingeschlossen, so halbiren die Linien AO, BO, CO die Winkel BAC, ABC und ACB. Es ist daher W. BOC = ABO + BAC + ACO, folglich weil $OBA + \frac{1}{2} BAC + ACO = 90°$ ist, auch W. $BOC = 90° + \frac{1}{2} BAC = 90 + \frac{1}{2}\alpha$.

Wird der Kreis ausschließend berührt, so wird der Beweis auf ähnliche Art geführt.

55. Wenn ein Kreis und eine Gerade gegeben ist und man zieht im Kreise einen zur Geraden senkrechten Durchmesser, bis er verlängert die Gerade trifft, so schneidet jede Linie, welche durch einen Endpunkt des Durchmessers gezogen ist, den Kreis und die Gerade unter gleichen Winkeln.

Beweis. Fig. 24. Es sei der Kreisdurchmesser AB zur Geraden MN senkrecht und AE, welche den Kreis in D schneidet, beliebig gezogen. Man ziehe DB. Das Dreieck ABD ist mit dem Dreiecke AEC gleichwinkelig, folglich W. ABD = W. AEC. — Dasselbe gilt auch für jede

Gerade, welche durch den Endpunkt **B** des Kreisdurchmessers gezogen ist.

56. Wenn sich zwei Kreise von innen in **A** berühren und man zieht durch **A** eine Tangente und eine zweite an den innern Kreis beliebig, welche den äußern Kreis in **B** und **C** schneidet, so wird der Winkel **CAB** durch die Linie **AD**, welche beide Berührungspunkte verbindet, halbirt.

Beweis. Fig. 25. Es schneiden sich die beiden Tangenten in **E**, so ist **AE** = **DE**, folglich W. **EAD** = W. **EDA**, folglich, weil **FG** mit **CB** parallel und daher W. **GDB** = **DGF** = **DAG** ist, auch W. **CAD** = W. **DAB**.

Wie ändert sich dieser Satz, wenn sich die Kreise von außen berühren?

57. Ist an zwei sich berührende Kreise eine gemeinschaftliche Tangente gezogen, so wird dieselbe von der durch den Berührungspunkt gehenden Tangente halbirt. Schneiden sich zwei Kreise, so wird die gemeinschaftliche Tangente von der Verlängerung der gemeinschaftlichen Sehne halbirt.

58. Wenn man im Dreiecke eine Transversale aus einer Ecke zieht, so entstehen zwei neue Dreiecke; beschreibt man um dieselben und um das gegebene Dreieck Kreise, so liegen die Mittelpunkte dieser drei Kreise und die Winkelspitze, aus welcher die Transversale gezogen wurde, wieder in einem Kreise.

Beweis. Fig. 26. Es sei **ABC** das gegebene Dreieck, **AD** die Transversale; **M**, **M′**, **M″** seien die Mittelpunkte der Kreise, welche um die Dreiecke **ABD**, **ACD**, **ABC** beschrieben sind. Man ziehe **MM′**, **MM″**, **M′M″**, **AM**, **AM′**, **AM″**. Für die Kreise **M**, **M′** ist **AD** gemeinschaftliche Sehne, weshalb **MM′** auf **AD** senkrecht steht. Daher ist der Winkel **AMM′** = **ABD**, weil **AMM′** die Hälfte des Centriwinkels **AMD** ist. Für die Kreise **M′**, **M″** ist **AC** gemeinschaftliche Sehne, weswegen W. **AM″M′** = W. **ABC** ist. Hieraus folgt, daß **AMM′** = **AM″M′** ist. Die Schenkel dieser beiden letztern Winkel gehen durch die

Punkte A und M'; es läßt sich daher durch die Punkte A, M, M'', M' ein Kreis beschreiben.

59. Beschreibt man die innern und äußern Berührungskreise eines Dreiecks, so ist

1) das Stück jeder Seite, welches zwischen einem Berührungspunkte des innern Berührungskreises und der anliegenden Ecke des Dreiecks liegt, dem Unterschiede des halben Umfangs und der der Ecke gegenüberliegenden Seite gleich;

2) das Stück einer Seite, welches zwischen einer Ecke und einem Berührungspunkte des gegenüberliegenden äußern Kreises liegt, dem halben Umfange selbst gleich.

Beweis. Fig. 27. ad 1) Weil, wenn die Punkte D, E, F die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises sind, AD = AF, BD = BE, CE = CF, so ist 2AD + 2BE + 2 CE dem Umfange des Dreiecks gleich. Bezeichnet man daher den halben Umfang mit H, so ist AD + BE + CE = H, d. h. AD + BC = H und daher AD = H — BC. Ebenso findet man BE = H — AC und CF = H — AB.

ad 2) Sind M, N, O Berührungspunkte eines äußern Berührungskreises, so ist CM + CN = CA + CB + AB = 2CM = 2CN. Setzt man daher CA + CB + AB = 2H, so ist CM = H. Dasselbe findet man für die übrigen Berührungskreise. Hieraus folgt, daß AM = AO = H — AC = BE = BD ist, u. s. w.

Welche Stücke der Dreiecksseiten und ihrer Verlängerungen sind daher in Bezug auf die Berührungskreise einander gleich?

Anmerkung. Bezeichnet man die Seiten BC, AC, AB mit a, b, c, den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises GF mit r und die Halbmesser der äußern Kreise, welche die Seiten a, b, c berühren, mit r', r'', r''', so findet man sogleich

$$\triangle ABC = H \cdot r \text{ und } r = \frac{\triangle ABC}{H} = \frac{2 \triangle ABC}{a + b + c}$$

$$r' = \frac{\triangle ABC}{H - a};\ r'' = \frac{\triangle ABC}{H - b};\ r''' = \frac{\triangle ABC}{H - c}.$$

Weil ferner die Dreiecke **AGF** und **MAK** ähnlich sind, so ist

$AF : GF = KM : MA$; da nun auch
$CF : CM = GF : KM$, so folgt

$$GF^2 = \frac{AF \cdot MA \cdot CF}{CM} = \frac{(H - a)(H - b)(H - c)}{H},$$

also auch, weil $\triangle ABC = H \cdot r$ ist,

$$\triangle ABC = \sqrt{H(H - a)(H - b)(H - c)} \text{ und}$$

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

---

60. Wenn man in einem Dreiecke einen Winkel halbirt, so wird durch die Halbirungslinie die Gegenseite in zwei Theile getheilt, welche sich verhalten wie die anliegenden Seiten, welche den halbirten Winkel einschließen. Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn man einen äußern Winkel des Dreiecks halbirt. (Hieraus folgt, daß die Gegenseite harmonisch geschnitten wird.)

61. Zwei Dreiecke sind ähnlich:

1) Wenn die drei Winkel in dem einen Dreiecke den drei Winkeln im andern Dreiecke gleich sind.
2) Wenn ein Winkel in dem einen Dreiecke einem Winkel im andern gleich ist, und die einschließenden Seiten in Proportion stehen.
3) Wenn die drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des andern Dreiecks proportionirt sind.
4) Wenn ein Winkel im einen Dreiecke einem Winkel im andern Dreiecke gleich und die Seiten, welche einen andern Winkel einschließen, in Proportion stehen, wenn nur die

beiden dritten Winkel zugleich kleiner (oder gleich) oder größer als ein Rechter sind.

Hiezu füge man:

5) Wenn die Seiten des einen Dreiecks mit den Seiten des andern Dreiecks parallel sind.

6) Wenn jede Seite des einen Dreiecks auf einer Seite des andern Dreiecks senkrecht steht.

7) Wenn die drei Seiten des einen Dreiecks mit den drei Seiten des andern Dreiecks, in einerlei Sinne genommen, gleiche Winkel bilden.

62. Wenn zwei rechtwinkelige Dreiecke ähnlich sind, so ist, wenn die Hypotenusen mit A und a, und die Katheten bezüglich mit B, b; C, c bezeichnet werden:

$$Aa = Bb + Cc.$$

Beweis. Denn weil $A^2 = B^2 + C^2$ und $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$, so multiplicire man die Glieder der Gleichung der Ordnung nach mit den letztern Verhältnissen, wodurch man obige Relation sogleich erhält.

63. Dreiecke, in welchen ein Winkel einem Winkel gleich, oder das Supplement desselben ist, verhalten sich, wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten. Dasselbe gilt auch von gleichwinkeligen Parallelogrammen.

64. Wenn auf den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks ähnliche Figuren so construirt werden, daß die Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks homologe Seiten der ähnlichen Figuren werden, so ist die Figur auf der Hypotenuse der Summe der Figuren auf den Katheten gleich. — Mittelst dieses Satzes lassen sich leicht mehre ähnliche Figuren summiren oder die Differenz derselben bestimmen.

65. Verbindet man die Ecken eines beliebigen Vielecks mit einem beliebigen Punkte und zieht zwischen den Verbindungslinien eine Folge von Parallelen mit den zugehörigen Seiten des Vielecks, so schließen diese ein Polygon ein, welches dem

gegebenen ähnlich ist. — Umgekehrt: Wenn (Fig. 28) zwischen den Seiten des Vielecks und den zugehörigen Parallelen die Proportion **BC : BF = DE : DG** besteht, so muß die Gerade **FG** verlängert den Punkt **A** treffen.

66. Ist in einem Punkte eines Kreisdurchmessers (oder auch in der Verlängerung desselben) eine Senkrechte errichtet und sind aus den Endpunkten des Durchmessers Gerade gezogen, welche den Kreis und das Loth schneiden, so ist das Produkt aus den Abschnitten eine constante Größe.

Es ist (Fig. 29) $AD \times AE = AF \times AG$ und zwar auch $= AB \times AC$.

67. Wenn im rechtwinkeligen Dreiecke die Hypotenuse mit c, die beiden Katheten mit a und b, die Höhe aus dem rechten Winkel mit h und die Projektionen der Katheten auf der Hypotenuse mit m, n bezeichnet werden, so ist

$$c : h = ab : mn.$$

68. Wird im Dreiecke **ABC** ein Winkel **A** durch eine Transversale **AD** halbirt, so ist das Produkt aus den den Winkel **A** einschließenden Seiten der Summe des Quadrats der Transversale und des Rechtecks aus den Abschnitten der von der Transversale durchschnittenen Seite gleich; d. h. es ist

$$AB \,.\, AC = AD^2 + BD \,.\, CD.$$

Man beschreibe um das Dreieck einen Kreis und verlängere die Transversale bis zum Durchschnitt mit dem Kreise, so lassen sich ähnliche Dreiecke bilden, aus denen die Behauptung sogleich folgt.

69. Bezeichnet **R** den Halbmesser des einem Dreiecke umbeschriebenen Kreises und a, b, c die Seiten des Dreiecks, so ist

$$R = \frac{abc}{4 \triangle ABC}.$$

Beweis. Fig. 29ᵃ. Man ziehe aus einer Ecke **A** einen Durchmesser **AD** und verbinde **D** mit **B**, so ist W. **ADB** = W. **ACB**; folglich ist $\triangle ABC : \triangle ABD = ab : 2R \,.\, BD$. Weil aber das Dreieck **ABD** rechtwinkelig

und folglich dem Inhalte nach $= \frac{1}{2}c \,.\, BD$ ist, so folgt obige Relation sogleich.

70. Wenn sich im Kreise, dessen Halbmesser $= R$ ist, zwei Sehnen AB, CD in O unter rechtem Winkel durchschneiden, so ist

1) $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4R^2$

2) $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 = 4R^2$.

71. Wenn sich zwei begrenzte Gerade so schneiden, daß die Abschnitte in wiederkehrender Proportion stehen, so läßt sich um die vier Endpunkte ein Kreis beschreiben.

72. Durchschneiden sich zwei Kreise und man zieht durch einen beliebigen Punkt der gemeinschaftlichen Sehne in jedem Kreise eine neue Sehne, so läßt sich durch die Endpunkte derselben ein Kreis legen. — Oder umgekehrt: Durchschneiden sich drei Kreise gegenseitig, so durchschneiden sich die gemeinschaftlichen Sehnen in einerlei Punkt. Hieraus folgt, daß die gemeinschaftlichen Tangenten an drei sich gegenseitig berührende Kreise sich in einem Punkte durchschneiden.

73. Nimmt man auf dem Durchmesser AB eines Kreises, dessen Mittelpunkt M ist, zwei Punkte C und D so an, daß $MC : MB = MB : MD$ ist, so stehen die Entfernungen eines jeden Punktes P des Kreisumfanges von den Punkten C und D, z. B. PC und PD, in demselben Verhältnisse.

Beweis. Fig. 29ᵇ. Weil $MC : MB = BM : MD$ und $MB = MP$ ist, so ist auch $MC : MP = MP : MD$. Es sind daher die Dreiecke MPC und MDP ähnlich; folglich ist

$$PC : PD = MC : MP = MC : MB = MB : MD.$$

74. Die beiden Ptolemäischen Sätze. 1) In jedem Vierecke im Kreise ist das Produkt (Rechteck) aus den Diagonalen der Summe der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich; d. h. es ist (Fig. 30) $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.

2) Das Verhältniß der Diagonalen ist dem Verhältnisse aus den Summen der Rechtecke von je zwei von den Endpunkten

der entsprechenden Diagonalen auslaufenden Seiten gleich;

d. h. es ist $\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + BC \times CD}{BA \times BC + DA \times DC}$.

Beweis. ad 1) Lege an AB einen Winkel ABE gleich dem Winkel CBD an, bis AC von BE in E geschnitten wird. Das Dreieck ABE ist dem Dreiecke BCD ähnlich; daher ist AE : AB = CD : BD, woraus

1) $AE \times BD = AB \times CD$.

Ebenso ist das Dreieck BEC dem Dreiecke ABD ähnlich, woraus CE : BC = AD : BD oder

2) $CE \times BD = BC \times AD$

folgt. Durch Addition der Gleichungen in Nr. 1 und Nr. 2 ist $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.

ad 2) Weil Winkel BAD + BCD = 180°, so ist

$\triangle ABD : \triangle BCD = AB \times AD : BC \times CD$, folglich

1) Viereck $ABCD : \triangle BCD = AB \times AD + BC \times CD : BC \times CD$.

Ebenso ist, weil W. ABC + ADC = 180°

$\triangle ABC : \triangle ADC = BA \times BC : DA \times DC$, folglich

2) $\triangle ABC$: Viereck $ABCD = BA \times BC : BA \times BC + DA \times DC$.

Weil nun auch

3) $\triangle ABC : \triangle BCD = AB \times AC : BD \times DC$, so folgt der Satz durch Verbindung der Proportionen in 1, 2 und 3. — Mittelst beider Sätze lassen sich die Diagonalen aus den vier Seiten bestimmen.

75. In jedem Vierecke im Kreise ist das Produkt der Lothe, welche aus den Ecken auf die eine Diagonale gefällt sind, gleich dem Produkte der Lothe, welche auf die andere Diagonale gefällt sind.

Beweis. Es seien im Viereck ABCD (Fig. 31) aus A und C die Lothe AG, CH auf die Diagonale BD, ebenso aus B und D die Lothe BF und DE auf AC gefällt. Im $\triangle ABO$ ist $AO . BF = BO . AG$ und im $\triangle CDO$ ist $CO . DE = DO . CH$, folglich durch Multiplication $AO . CO . BF . DE = BO . DO . AG . CH$. Weil aber $AO . CO = BO . DO$, so folgt $BF . DE = AG . CH$.

76. In jedem Vierecke im Kreise ist das Produkt aus den vier Seiten dem Produkte aus dem Quadrate des Durchmessers und den auf eine Diagonale gefällten Lothen gleich.

Beweis. Fig. 32. Es seien im Vierecke ABCD aus B und D auf die Diagonale AC die Lothe BF, DE gefällt. Verbinde den Mittelpunkt M mit B und D und fälle aus M auf BC und CD die Lothe MG, MH, so ist $BG = \frac{1}{2}BC$ und $DH = \frac{1}{2}DC$. — Das Dreieck ABF ist dem Dreiecke MBG ähnlich, ebenso das Dreieck ADE dem Dreiecke MDH. Daher ist

$$AB : BF = MB : BG = D : BC$$ und

$$AD : DE = MD : DH = D : DC,$$ folglich

$$AB \,.\, AD \,.\, BC \,.\, DC = D^2 \,.\, BF \,.\, DE.$$

77. Wenn die Ecken eines Dreiecks DEF in den Seiten eines Dreiecks ABC liegen, so verhält sich das einbeschriebene $\triangle$ DEF zum umbeschriebenen $\triangle$ ABC, wie die Summe der Produkte aus je drei überspringenden Abschnitten zu dem Produkte aus den drei Seiten.

Beweis. Es mögen (Fig. 33) die den Winkeln des umbeschriebenen Dreiecks gegenüberliegenden Seiten BC, AC, AB mit A, B, C die Abschnitte auf denselben mit a, a'; b, b'; c, c' bezeichnet werden. — Es ist

$$\triangle CDE : \triangle ABC = ab' : AB$$ oder

$$\triangle CDE = \frac{ab'}{AB} \cdot \triangle ABC;$$ ebenso ist

$$\triangle BEF = \frac{a'c}{AC} \cdot \triangle ABC$$

$$\triangle ADF = \frac{bc'}{BC} \triangle ABC.$$

Durch Addition dieser drei Dreiecke und Subtraktion vom Dreieck ABC erhält man

$$\triangle DEF = \frac{(ABC - Cab' - Ba'c - Abc')}{ABC} \triangle ABC;$$

weil aber $C = c + c'$, $B = b + b'$, $A = a + a'$, so erhält man nach gehöriger Entwickelung

$$\triangle DEF = \frac{abc + a'b'c'}{ABC} \cdot \triangle ABC \text{ oder}$$

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{abc + a'b'c'}{ABC}.$$

78. Wenn um und in ein Dreieck ABC zwei Dreiecke MNQ und DEF, deren Seiten zu einander parallel sind, beschrieben sind, so ist das Dreieck ABC die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Dreiecken MNQ und DEF.

Beweis. Fig. 34. Man verbinde die gleichliegenden Ecken der ähnlichen Dreiecke DEF und MNQ, so läßt sich leicht nach Nr. 65 beweisen, daß die Verbindungslinien MD, NE, QF sich in einem Punkte O treffen. Man ziehe noch OA, OB, OC, so schneiden diese die Dreiecksseiten DE, EF, FD in H, J, G. —

1) Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$, so ist

$$\frac{a + c + e + \ldots}{b + d + f + \ldots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \ldots$$

2) Weil alle durch den Punkt gezogenen Gerade proportionirt geschnitten sind, so ist

$$\frac{\triangle OMA}{\triangle ODA} = \frac{\triangle ONA}{\triangle OEA} = \frac{\triangle ONC}{\triangle OEC} = \frac{\triangle OQC}{\triangle OFC} =$$

$$\frac{\triangle OQB}{\triangle OBF} = \frac{\triangle OMB}{\triangle ODB}, \text{ folglich}$$

$$1) \quad \frac{\triangle MNQ}{\triangle ABC} = \frac{\triangle OMA}{\triangle ODA}.$$

Aus demselben Grunde ist

$$\frac{\triangle ODA}{\triangle ODH} = \frac{\triangle OEA}{\triangle OEH} = \frac{\triangle OEC}{\triangle OEJ} = \frac{\triangle OFC}{\triangle OFJ} =$$

$$\frac{\triangle OBF}{\triangle OGF} = \frac{\triangle ODB}{\triangle ODG}, \text{ folglich}$$

$$2) \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\triangle ODA}{\triangle ODH}.$$

Weil aber auch $\frac{\triangle\ OMA}{\triangle\ ODA} = \frac{\triangle\ ODA}{\triangle\ ODH}$, so ist

$$\frac{\triangle\ MNQ}{\triangle\ ABC} = \frac{\triangle\ ABC}{\triangle\ DEF}.$$

79. Wenn O ein beliebiger Punkt, und die Entfernungen desselben von den Seiten a, b, c mit H, H', H'', ferner die Höhen des Dreiecks in Bezug auf dieselben Seiten mit h, h', h'' bezeichnet werden, so ist:

1) wenn der Punkt O im Dreiecke selbst liegt:

$$\frac{H}{h} + \frac{H'}{h'} + \frac{H''}{h''} = 1;$$

2) wenn der Punkt O außerhalb des Dreiecks, aber zwischen den Schenkeln des Winkels A liegt:

$$\frac{H}{h'} + \frac{H''}{h''} - \frac{H}{h} = 1;$$

3) wenn der Punkt O zwischen den Schenkeln des Scheitelwinkels von A liegt:

$$\frac{H}{h} - \frac{H'}{h'} - \frac{H''}{h''} = 1.$$

Man verbinde den Punkt O mit den Ecken des Dreiecks, so entstehen drei Dreiecke, aus denen die Relation sich sogleich ergibt. —

80. In jedem Dreiecke ist das Produkt zweier Seiten dem Produkte der Höhe auf die dritte Seite und des Durchmessers des umbeschriebenen Kreises gleich.

Man verbinde den zweiten Endpunkt des Durchmessers mit der nächsten Winkelspitze, so entstehen ähnliche Dreiecke, aus welchen die Relation sogleich folgt.

81. Zieht man in einem Dreiecke ABC durch eine Winkelspitze A eine beliebige Transversale AD, so ist immer

$$BD \cdot b^2 + CD \cdot c^2 - AD^2 \cdot a = CD \cdot BD \cdot a.$$

82. Wenn in zwei dem Inhalte nach gleichen Dreiecken,

deren Seiten a, b, c; a′, b′, c′ sind, ein Winkel C einem Winkel C′ gleich ist, so ist

$$c^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2.$$

Ergänzen sich aber die zwei Winkel zu zwei Rechten, so ist

$$c^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2.$$

83. Wenn die Radien zweier ungleicher Kreise mit r und R, zwei in denselben liegende ungleiche Winkel mit α, β und die zugehörigen Bögen mit ab, AB bezeichnet werden, so ist

$$ab : AB = r\alpha : R\beta.$$

84. a) Bewegen sich die Schenkel eines Winkels um zwei feste Punkte, ohne daß der Winkel seine Größe ändert, so dreht sich die Halbirungslinie des Winkels ebenfalls um einen festen Punkt.

b) Bewegt sich eine Kreissehne um einen festen, im Kreise oder auf dem Umfange desselben liegenden Punkt, so beschreibt der Halbirungspunkt derselben einen Kreis, dessen Durchmesser die Gerade ist, welche den Punkt mit dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises verbindet.

c) Bewegt sich im Kreise ein Rechteck so, daß eine Seite desselben immer durch einen festen Punkt geht, so dreht sich die Gegenseite ebenfalls um einen festen Punkt, welcher mit ersterem auf einerlei Durchmesser liegt und vom Mittelpunkt auch einerlei Entfernung hat.

d) Fällt man von einem Punkte, welcher in dem Umfange eines Kreises liegt, Lothe auf die Schenkel eines Mittelpunktswinkels und legt durch die Fußpunkte und den Mittelpunkt einen zweiten Kreis, so berührt letzterer den gegebenen Kreis in dem gegebenen Punkte.

e) Sind in einen Kreis zwei Winkel ABC und DEF so beschrieben, daß AB mit DE und BC mit EF parallel ist, so ist auch DC mit AF parallel.

f) Zwei Dreiecke, welche auf einerlei Grundlinie liegen und nicht zwischen denselben Parallelen, verhalten sich, wie die

Stücke der Verbindungslinie ihrer Spitzen, von jeder Spitze bis zum Durchschnitte mit der Grundlinie gerechnet.

g) Verlängert man zwei an einander stoßende Seiten eines Parallelogramms und schneidet von beliebigen Punkten aus auf denselben Stücke ab, welche den in den beiden Geraden liegenden Seiten des Parallelogramms gleich oder proportional sind, und verbindet die Endpunkte dieser Stücke mit einem und demselben Punkte der Diagonale oder ihrer Verlängerung, so sind die hierdurch entstehenden Dreiecke immer einander gleich.

h) Ist einem Kreise ein Viereck einbeschrieben, dessen Diagonale ein Durchmesser des Kreises ist, so steht die Gerade, welche die Durchschnitte je zweier Gegenseiten verbindet, auf demselben senkrecht.

i) Ist einem Kreise ein Viereck einbeschrieben und sind beide Diagonalen gezogen, so erhält man an jeder Diagonale zwei Dreiecke. Werden in jedem derselben die Durchschnitte der Höhen bestimmt, so liegen diese vier Punkte ebenfalls in einem dem gegebenen gleichen Kreise.

k) Das Quadrat der Seite des regulären Zehnecks, mehr dem Quadrate der Seite des regulären Sechsecks, ist dem Quadrate der Seite des regulären Fünfecks gleich.

l) Wenn man in einem Quadrate eine beliebige Transversale zwischen zwei Gegenseiten legt und zieht zu derselben eine Senkrechte durch einen beliebigen Punkt, so ist das zwischen den beiden andern Gegenseiten liegende Stück derselben der ersteren gleich.

m) Wenn sich zwei Kreise schneiden und es wird um einen beliebigen Punkt der gemeinschaftlichen Sehne ein dritter Kreis beschrieben, welcher von dem einen Kreise halbirt wird, so wird derselbe auch vom zweiten Kreise halbirt.

n) Ist um die Spitze eines rechten Winkels ein Kreis beschrieben, und sind aus zwei beliebigen Punkten, welche auf den Schenkeln jenes Winkels liegen, Tangenten an den Kreis gezogen, so bestimmen dieselben ein Viereck, welches zugleich centrisch nach den Ecken ist.

II. Geometrie der Lage.

Wenn es sich um die Lage von Punkten und Geraden (auch Kurven) handelt, so findet man, daß aus einer und derselben Betrachtung sich immer zwei Sätze ableiten lassen, welche einander so gegenüberstehen, daß man den einen immer durch blose Vertauschung der Worte „Punkt" und „Gerade" und „liegen" und „schneiden" oder „durchgehen" erhält. Z. B. Dem Satze: „Zwei Punkte bestimmen eine einzige Gerade, in welcher sie liegen;" steht gegenüber: „Zwei Gerade bestimmen einen einzigen Punkt, in welchem sie sich schneiden."

Zwei solche Sätze pflegt man als zusammengehörig auch neben einander zu schreiben, und nennt sie „reciproke Sätze". Dieses Gesetz der Reciprocität findet nicht allein in der Geometrie der Ebene, sondern noch mehr in der Geometrie des Raumes selbst seine Anwendung *).

85. Unter einem vollständigen n Eck versteht man ein System von n Punkten, von welchen keine drei in einer Geraden liegen, und den $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Geraden, welche die Punkte verbinden. Z. B. Das vollständige Viereck besteht aus 4 Punkten und den 6 Geraden, durch welche dieselben verbunden werden. Drei dieser Geraden schneiden sich immer in einem Punkte. Durch drei Paare von einander gegen-

Unter einem vollständigen n Seit versteht man ein System von n Geraden, von welchen keine drei durch einen Punkt gehen, und den $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Punkten, in welchen dieselben sich schneiden. Z. B. Das vollständige Vierseit besteht aus 4 Geraden und den 6 Punkten, in welchen sie sich schneiden. Drei dieser Punkte liegen immer in einer Geraden. Durch drei Paare von einander gegenüberliegenden Punkten sind

*) Siehe unten Abtheil. III.

überliegenden Seiten sind noch drei Punkte bestimmt, in welchen sich dieselben schneiden.

noch drei Gerade bestimmt, welche durch dieselben gehen.

Das vollständige Viereck (Fig. 35) ABCD besteht aus den Punkten A, B, C, D und den Geraden AB, CD; BC, AD; AC, BD. Jedes Paar dieser Geraden bestimmt noch bezüglich einen der Punkte E, F, G. Das vollständige Vierseit AECF besteht dagegen aus den Geraden AE, BF, ED, AF und ihren Durchschnitten B, E, A, C, F, D. Jedes Paar der Gegenpunkte A, C; B, D; E, F bestimmt bezüglich eine der drei Geraden AC, BD, EF. Werden sämmtliche Linien bis zu ihren Durchschnitten verlängert, so entsteht eine Figur ABHF, welche unter dem Namen des vollständigen Vierecks mit seinen drei Diagonalen (nach Carnots „Geometrie der Stellung") bekannt ist. Die drei Diagonalen des gemeinen Vierecks ABCD sind nämlich AC, BD und EF.

Im vollständigen Vierecke kann jeder Eckpunkt als der Durchschnitt dreier Transversalen betrachtet werden, welche bezüglich durch die Ecken desjenigen Dreiecks gehen, welches durch die drei übrigen Eckpunkte bestimmt ist.

Im vollständigen Vierseite kann jede Seite als eine Transversale des Dreiecks betrachtet werden, welches durch die drei übrigen Seiten bestimmt ist, während die Transversale durch keinen Eckpunkt geht.

Betrachtet man (Fig. 35) den Punkt A als den Durchschnitt der drei Transversalen AB, AC, AD, welche nach den Ecken B, C, D gezogen sind und die Gegenseiten CD, BD, BC, E, G, F schneiden, so erhält man sechs Abschnitte BF, BG, DE, DG, CE, CF der Seiten, von welchen jeder auf einer Seite zwischen einem Eckpunkt und einem Durchschnittspunkt derselben Seite mit einer Transversale, welche nach der Gegenecke des Dreiecks gezogen ist, liegt. Stellt man von diesen sechs Abschnitten je drei so zusammen, daß kein Eckpunkt und kein Durch-

schnittspunkt der zugehörigen Seite mit der Transversale doppelt in einer solchen Complexion vorkommt, so sagt man, es seien drei überspringende Abschnitte zusammengestellt. Man erhält daher für das Dreieck BCD die beiden Complexionen: BG, CF, DE und DG, BF, CE. Betrachtet man das Dreieck ABD mit den zugehörigen Transversalen aus C, so erhält man die beiden Complexe: AE, BG, DF und BE, DG, AF u. s. w.

Betrachtet man ebenso eine Seite, z. B. DE des vollständigen Vierseits AECF als eine Transversale, welche die drei Seiten des Dreiecks ABF durchschneidet, so erhält man ebenfalls sechs Abschnitte BE, AE, BC, FC, AD, FD, von welchen jeder auf einer Seite zwischen einem Eckpunkte und einem Durchschnittspunkte derselben Seite mit der Transversale liegt. Stellt man von diesen sechs Abschnitten je drei so zusammen, daß kein Eckpunkt und kein Durchschnittspunkt der zugehörigen Seite mit der Transversale doppelt in einer solchen Complexion vorkommt, so sagt man ebenfalls, es seien drei überspringende Abschnitte zusammengestellt. Man erhält daher die Complexe: AE, BC, FD und BE, FC, AD.

86. In jedem vollständigen Vierseite werden durch die drei Durchschnittspunkte einer Seite mit den drei andern Seiten auf letzteren sechs Abschnitte so bestimmt, daß die Produkte (der Maßzahlen) aus den überspringenden Abschnitten gleich sind.

In jedem vollständigen Vierecke werden durch die Durchschnittspunkte von drei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten mit den drei andern Seiten auf letzteren sechs Abschnitte so bestimmt, daß die Produkte (der Maßzahlen) aus den überspringenden Abschnitten gleich sind.

Beweis des links stehenden Satzes. Fig. 36[a].

Es sei DF eine Seite des vollständigen Vierseits ADEC. Ziehe durch einen Eckpunkt z. B. B mit DF eine Parallele Bm, welche die Seite AC in m schneidet, so ist

AF : Fm = AD : BD

Fm : BE = CF : CE, folglich durch Multiplikation AF . BD . CE = AD . CF . BE. Es enthalten aber beide Seiten der Gleichung überspringende Abschnitte. Zugleich erhellet, daß DF eine Transversale des Dreiecks ABC ist.

Beweis des rechts stehenden Satzes. Fig. 36[b].

Es ist AD eine Transversale des Dreiecks CEB, woraus nach dem Vorhergehenden folgt: EA . CF . BD = ED . BF . CA. Ebenso ist DG eine Transversale des Dreiecks AEB, woraus folgt: AC . ED . BG = AG . BD . EC. Durch Multiplikation beider Gleichungen erhält man AE . CF . BG = AG . CE . BF. Da nun E, F, G die Durchschnitte der drei von D auslaufenden Seiten des Vierecks ABCD mit den drei übrigen Seiten sind und jede Seite der erhaltenen Gleichung überspringende Abschnitte enthält, so folgt der Satz.

87. Liegen auf den Seiten eines Dreiecks drei Punkte so, daß die Produkte aus den überspringenden Abschnitten einander gleich sind,

so liegen die drei Punkte in einer Geraden, wenn die Anzahl der Punkte, welche auf den Dreiecksseiten selbst liegen, eine gerade Zahl ist.	so durchschneiden sich die Linien, welche aus diesen Punkten nach den Gegenecken gezogen sind, in einem einzigen Punkte, wenn die Anzahl der Punkte, welche auf den Seiten selbst liegen, eine ungerade Zahl ist.

Der Beweis beider Sätze läßt sich mit Hülfe der beiden vorhergehenden leicht indirekt führen. Auch erhellet, daß hierdurch folgende Sätze bewiesen sind:

In jedem Dreiecke durchschneiden sich a) die sogenannten Mittellinien, b) die Halbirungslinien der Winkel, c) die drei Höhen in je einem Punkte. (Vergl. Nr. 28.)

Anmerkung. Man pflegt die Gleichungen in Nr. 86 auch in

der Form von Quotienten zu schreiben. Man erhält dann $\frac{AF}{CF} \cdot \frac{BD}{AD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$ und ebenso $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BG}{AG} \cdot \frac{CF}{BF} = 1$, wo die Bildung dieser Partialbrüche ebenso leicht erhellet, wie die der Produkte.

(88. Die drei Hülfslinien, welche bei dem euklideischen Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gezogen werden, schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Fig. 37. Es sei ABC das in B rechtwinkelige Dreieck; E, D seien die Endpunkte der Seiten von den zu AB, BC gehörigen Quadraten; AD und CE ebenso BF, welche auf AC senkrecht steht, seien die Hülfslinien. Wegen der ähnlichen Dreiecke DCM und ABM ist

$$1)\quad CM : CD = BM : AB$$

und wegen der ähnlichen Dreiecke BNC und ANE ist

$$2)\quad BN : BC = AN : AE.$$

Weil nun $CD = BC$, $AE = AB$, $AB^2 = AF \,.\, AC$ und $BC^2 = CF \,.\, AC$, so folgt aus den Gleichungen 1) und 2) $CM \,.\, BN \,.\, AF = CF \,.\, AN \,.\, BM$. Da nun die drei Punkte F, M, N auf den Seiten des Dreiecks ABC selbst liegen, so schneiden sich AD, BF, CE in einem Punkte.)

89. Liegen zwei Dreiecke so, daß die Geraden, durch welche je zwei homologe Eckpunkte verbunden werden, sich in einem Punkte schneiden, so liegen auch die Durchschnitte je zweier homologer Gegenseiten in einer Geraden.

Liegen zwei Dreiecke so, daß die Durchschnitte je zweier homologer Seiten in einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien je zweier homologer Eckpunkte in einem Punkte.

Beweis des links stehenden Satzes. Fig. 38.

Die Linien Aa, Bb, Cc, welche durch die Eckpunkte der Dreiecke ABC, abc gezogen sind, mögen sich in G durchschneiden, so liegen die Durchschnitte M, P, N der

Seiten AB und ab, BC und bc, AC und ac in einer Geraden. — Es ist BMaG ein vollständiges Vierseit, woraus, wenn Mab als Transversale betrachtet wird, folgt, daß

1) AM . Bb . Ga = Aa . BM . Gb

ist. Ebenso ist ANcG ein vollständiges Vierseit, woraus in Bezug auf die Transversale Nca folgt, daß

2) Aa . Gc . CN = AN . Cc . Ga

ist. Aus dem vollständigen Vierseite BPcG folgt endlich, wenn die Seite Pb als Transversale betrachtet wird,

3) Gb . BP . Cc = Gc . CP . Bb.

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

AM . BP . CN = AN . BM . CP,

woraus nach Nr. 87 folgt, daß die Punkte M, P, N in einer Geraden liegen.

In Bezug auf den rechts stehenden Satz ist zu beweisen, daß die Punkte B, b, G in einer Geraden liegen, was auf dieselbe Weise wie vorher geschieht, indem man zeigt, daß die Durchschnitte B, b, G, homologer Seiten der Dreiecke MAa, PCc in einer Geraden liegen.

Hieraus folgt:

Bewegt sich ein (der Gestalt nach veränderliches) Dreieck so, daß seine drei Ecken in drei sich in einem Punkt schneidenden festen Geraden bewegen, während zwei Seiten durch zwei feste Punkte gehen, so geht auch die dritte Seite immer durch einen festen Punkt, welcher mit den beiden andern Punkten in einer Geraden liegt. — Die drei festen Ge-

Bewegt sich ein (der Gestalt nach veränderliches) Dreieck so, daß jede der drei Seiten immer durch einen von drei in einer Geraden liegenden festen Punkten geht, während zwei Eckpunkte in zwei festen Geraden sich bewegen, so bewegt sich auch der dritte Eckpunkt in einer festen Geraden, welche mit den beiden andern Geraden einerlei Durchschnittspunkt hat.

raden können auch zu einander parallel sein. — Sind die beiden festen Geraden parallel, so ist die dritte ebenfalls mit denselben parallel.

90. Liegen zwei vollständige Vierseite so, daß die Verbindungslinien von fünf homologen Eckpunkten sich in einem und demselben Punkt schneiden, so geht die Verbindungslinie der beiden übrigen Eckpunkte durch denselben Punkt und die vier Durchschnittspunkte je zweier homologer Seiten liegen in einer und derselben Geraden.

Liegen zwei vollständige Vierecke so, daß die Durchschnitte von fünf homologen Seiten in einer und derselben Geraden liegen, so liegt der Durchschnitt der beiden übrigen Seiten in derselben Geraden und die Verbindungslinien je zweier homologer Ecken durchschneiden sich in einem und demselben Punkte.

Beweis des links stehenden Satzes. Fig. 39.

Es mögen die Verbindungslinien der Eckpunkte A, a; B, b; C, c; E, e; F, f sich in einem Punkte G durchschneiden, so soll die Linie Dd ebenfalls durch G gehen, und die vier Durchschnitte von je zwei homologen Seiten in einer Geraden liegen. — Wegen der Dreiecke ACF und acf liegen (89) die Durchschnitte M, N, P der Seiten in einer Geraden, und wegen der Dreiecke ABE und abe auch die Durchschnitte M, N, O der zugehörigen Seiten ebenfalls in einer Geraden; folglich liegen M, N, O, P in einer einzigen Geraden. Weil nun die Durchschnitte P, N, O der homologen Seiten der Dreiecke DEF, def in einer Geraden liegen, so muß Dd durch denselben Punkt G gehen, in welchem sich Ee, Ff und die übrigen Verbindungslinien durchschneiden.

Der rechts stehende Satz wird auf ähnliche Art bewiesen.

Anmerkung. Wenn zwei Dreiecke so liegen, daß die Verbindungslinien der Eckpunkte sich in einem Punkte schneiden, so sagt man, die Dreiecke liegen perspektivisch

und von zwei homologen Seiten sei jede eine Projektion (im allgemeineren Sinne) von der andern. Der Durchschnitt der Verbindungslinien der Eckpunkte (Projektionsstrahlen) heißt das Projektionscentrum. Zwei n Ecke liegen perspektivisch, wenn die Verbindungslinien je zweier Eckpunkte sich sämmtlich in einem Punkte schneiden. Die projicirenden Linien bilden einen Strahlenbüschel, wenn dieselben als unendliche Linien betrachtet werden; betrachtet man aber den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt als einen Endpunkt, so bilden sie einen Halbstrahlenbüschel, dessen Elemente Halbstrahlen sind.

91. Wenn zwei vollständige n Seite so liegen, daß (2 n — 3) Verbindungslinien von je zwei homologen Eckpunkten sich in einem Punkte schneiden, so liegen die beiden n Seite perspektivisch und die n Durchschnittspunkte je zweier homologer Seiten liegen in einer Geraden.

Wenn zwei vollständige n Ecke so liegen, daß (2 n — 3) Durchschnitte von je zwei homologen Seiten in einer Geraden liegen, so liegen die beiden n Ecke perspektivisch und die Durchschnitte je zweier der übrigen homologen Seiten liegen in derselben Geraden.

92. Harmonisch liegende Punkte und Strahlen. Von vier in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C, D sagt man, daß sie harmonisch liegen, wenn die Entfernungen des Punktes B von den Punkten A und C in demselben Verhältnisse stehen, wie die Entfernungen des Punktes D von denselben Punkten A und C. Nimmt man die Punkte A und C als fest an, so können offenbar die Punkte B und D nicht zwischen A und C zugleich liegen; denn wenn die Punkte in der Ordnung A, B, D, C liegen könnten, so wäre offenbar $AB < AD$ und $BC > DC$; folglich wäre um so mehr $\frac{AB}{BC} < \frac{AD}{CD}$. Auch können die Punkte B und D nicht zugleich auf den Verlängerungen der Linie AC liegen. Denn wollte

man annehmen, die Punkte lägen in der Ordnung A, C, B, D, so hätte man $\left(\text{wegen } \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}\right)$ auch $\frac{BA - BC}{BC} = \frac{DA - DC}{DC}$, d. h. $\frac{AC}{BC} = \frac{AC}{DC}$, was ungereimt ist, und wollte man annehmen, daß die Punkte in der Ordnung B, A, C, D auf einander folgen würden, so wäre ebenfalls $\frac{AB}{BC} < \frac{AD}{DC}$. Es liegt daher immer einer der Punkte B und D zwischen A und C, und der andere auf einer der Verlängerungen. Wenn B näher an A als an C liegt, so folgt aus der Betrachtung der Proportion, daß die Punkte in der Ordnung D, A, B, C auf einander folgen müssen, weil dann D dem A ebenfalls näher liegen muß, als dem C. Je mehr sich B von A entfernt, desto mehr nähert sich das Verhältniß $\frac{BA}{BC}$ der Einheit, woraus folgt, daß der Punkt D sich ebenfalls mehr von A entfernen muß. Weil nun eben so klar ist, daß wenn B dem C näher liegt, als dem A, die Punkte in der Ordnung A, B, C, D auf einander folgen müssen, so ist hieraus ersichtlich, daß wenn der Punkt B, in der Nähe von A anfangend, sich stetig in der Richtung von A nach C bewegt, der Punkt D, ebenfalls in der Nähe von A anfangend, sich dem in der Richtung CA liegenden unendlich fernen Punkte nähert, und mit demselben zusammenfällt, wenn der Punkt B die Mitte von AC erreicht hat. Rückt hierauf der Punkt B dem Punkte C näher, so erscheint der Punkt D auf der Verlängerung von AC und rückt ebenfalls dem Punkte C näher. Hieraus folgt, daß jedem zwischen A und C liegenden Punkte B ein anderer auf einer der Verlängerungen der Linie AC liegender Punkt entspricht, und daß die beiden unendlich fernen Punkte einer Geraden nur als ein einziger Punkt zu betrachten sind, welche Behauptung noch durch viele andere Betrachtungen gerechtfertigt wird. — Weil B und D nicht zugleich zwischen A und C und nicht zugleich auf den Verlängerungen der Linie AC liegen können, so sagt man, die Punkte A und C,

ebenso B und D seien **getrennte Punkte** und **einander zugeordnet**.

Werden vier harmonisch liegende Punkte durch vier Strahlen mit einem außerhalb ihrer Richtung liegenden Punkte verbunden, so heißen dieselben ein **harmonischer Strahlenbüschel**, in welchem zwei nicht auf einander folgende **getrennte** und **einander zugeordnete** Strahlen heißen.

93. Sind vier in einer Geraden harmonisch liegende Punkte die Schnittpunkte der Geraden mit den Strahlen eines Strahlenbüschels, so ist letzterer ein harmonischer, welcher jede andere beliebig schneidende Gerade ebenfalls in vier harmonisch liegenden Punkten schneidet.

Beweis. Fig. 40. Wenn die harmonisch liegenden Punkte A, B, C, D Schnittpunkte des Strahlenbüschels SA, SB, SC, SD sind, so ziehe durch A die Gerade Abcd beliebig. Betrachtet man SB als Transversale des Dreiecks AcC, so ist

$$1)\quad AB \,.\, CS \,.\, cb = Ab \,.\, Sc \,.\, CB.$$

Betrachtet man ferner SD als Transversale desselben Dreiecks, so ist

$$2)\quad Ad \,.\, cS \,.\, CD = AD \,.\, CS \,.\, cd.$$

Aus beiden Gleichungen folgt $AB \,.\, cb \,.\, Ad \,.\, CD = Ab \,.\, CB \,.\, AD \,.\, cd$. Weil nun wegen des harmonischen Gebildes A, B, C, D auch $AB \,.\, CD = CB \,.\, AD$ ist, so ist auch $cb \,.\, Ad = Ab \,.\, cd$ oder $\frac{Ad}{Ab} = \frac{cd}{cb}$. Hieraus folgt, daß AD harmonisch getheilt ist, und weil jede mit Ad parallele Gerade von den Linien SA, SB, SC, SD in demselben Verhältnisse getheilt wird, so ist der Satz bewiesen.

Würde man, statt durch A, eine Gerade durch B gezogen haben, welche die Halbstrahlen SB, SC, SD und Sa′ (nicht SA) schneidet (Fig. 40), so würde man mit Hülfe des Dreiecks BDd′ und der zugehörigen Trans-

versalen Aa', SC ebenso wie vorher gefunden haben, daß B, c', d', a' vier harmonisch liegende Punkte seien. Hieraus folgt:

1) daß wenn irgend vier Halbstrahlen eines harmonischen Strahlenbüschels durch eine beliebige Gerade geschnitten werden, die Schnittpunkte immer harmonisch liegen. Wenn demnach (Fig. 41) A, B, C, D harmonisch liegende Punkte sind, so ist dies auch der Fall mit den Punkten $B_{,}$, $C_{,}$, $D_{,}$, $A_{,}$, ferner $C_{,}$, $D_{,,}$, $A_{,,}$, $B_{,,}$, ebenso mit $B_{,,}$, $C_{,,,}$, $D_{,,,}$, $A_{,,,}$ u. s. w.

2) Wenn B in der Mitte von AC liegt (Fig. 40), so muß der Strahl SD nothwendig mit AC parallel sein.

3) Wird der harmonische Strahlenbüschel SA, SB, SC, SD mit einer Geraden durchschnitten, welche mit einem dieser Strahlen parallel ist, so wird das zwischen zwei zugeordneten Strahlen liegende Stück derselben von dem dritten Strahle halbirt.

4) Wird der Winkel, welchen zwei einander zugeordnete Strahlen bilden, von einem dritten Strahle halbirt, so steht der dem letztern zugeordnete Strahl auf ihm senkrecht.

94. Irgend zwei harmonische gerade Gebilde können als Schnitte eines und desselben harmonischen Strahlenbüschels betrachtet werden.

Beweis. Fig. 40. Es sei A, B, C, D ein Schnitt des Büschels SA, SB, SC, SD und E, F, G, H ein beliebig anderes harmonisches gerades Gebilde. Beschreibt man über EF einen Kreisabschnitt, welcher den Winkel ASB und über FG einen Abschnitt, welcher den Winkel BSC faßt, und wird der Durchschnitt der beiden Kreise mit E, F, G durch Gerade verbunden, so kann offenbar der zu E, F, G gehörige Strahlenbüschel auf den Strahlenbüschel SA, SB, SC so gelegt werden, daß sich dieselben decken, und weil der Punkt H durch die Punkte

E, F, G bestimmt ist, so kann derselbe nirgends anderswo liegen, als im Durchschnitte der Linie EG mit SD.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun:

Jedes harmonische Gebilde bestimmt unendlich viele harmonische Strahlenbüschel, von welchen je ein Strahl durch je einen Punkt des Gebildes geht.

Alle mögliche harmonische gerade Gebilde können als Schnitte eines und desselben harmonischen Strahlenbüschels betrachtet werden.

Jeder harmonische Strahlenbüschel bestimmt unendlich viele harmonische Gebilde, von welchen je ein Punkt in je einem Strahle des Büschels liegt.

Alle mögliche harmonische Strahlenbüschel können als Projektionsstrahlen eines und desselben harmonischen geraden Gebildes betrachtet werden.

Anmerkung. Von einem harmonischen Strahlenbüschel sagt man, daß zwei einander zugeordnete Strahlen durch zwei beliebig in den beiden andern einander zugeordneten Strahlen liegende Punkte harmonisch getrennt seien, und umgekehrt.

95. In jedem Carnotschen vollständigen Vierecke mit seinen drei Diagonalen sind die Endpunkte einer jeden Diagonale durch ihre Schnittpunkte mit den beiden andern Diagonalen harmonisch getrennt.

Beweis. Fig. 42. Es ist zu zeigen, daß z. B. die Punkte B, M, D, H harmonisch liegen. — Vom Punkte C sind nach den Ecken des Dreiecks ABD die Geraden CA, CB, CD gezogen, woraus folgt:

$$AE \,.\, BM \,.\, DF = AF \,.\, DM \,.\, BE.$$

Für dasselbe Dreieck ist EH eine Transversale, welche die drei Seiten schneidet, woraus folgt:

$$AE \,.\, BH \,.\, DF = BE \,.\, AF \,.\, DH.$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man BM : BH = DM : DH, woraus hervorgeht, daß die Punkte B, M, D, H harmonisch liegen. — Um zu zeigen, daß die

Punkte E, G, F, H harmonisch liegen, wird man das Dreieck AEF, nach dessen Ecken vom Punkte C Gerade gezogen sind und die Transversale BH der Seiten, und ebenso für die Punkte A, G, C, M das Dreieck ACD mit den Transversalen aus dem Punkte B nach seinen Ecken und dann die Transversale EF zu Hülfe nehmen.

Es läßt sich dieser Satz auch so aussprechen:

In jedem vollständigen Vierecke sind je zwei Gegenseiten durch die zwei Punkte harmonisch getrennt, in welchen sich zwei zusammen gehörige Gegenseiten der vier übrigen Seiten schneiden.

In jedem vollständigen Vierseite sind je zwei Gegenecken durch die zwei Geraden harmonisch getrennt, welche zwei zusammen gehörige Gegenecken der vier übrigen Ecken verbinden.

Hieraus folgt:

96. Fig. 43. Wenn ein Strahlenbüschel AB, AC, AD u. s. w. von zwei andern Strahlen GB, GB durchschnitten wird und man zieht in den hierdurch entstehenden Vierecken BB,C,C; CC,D,D u. s. w. die Diagonalen, so liegen die Durchschnitte m, m, u. s. w. der letztern wieder in einer Geraden, welche zugleich durch den Durchschnittspunkt der Strahlen GB, GB geht.

Wenn zwischen zwei Strahlen GB, GB, an einander liegende Vierecke BB,C,C; CC,D,D u. s. w. so construirt werden, daß die Durchschnitte m, m, u. s. w. ihrer Diagonalen in einer Geraden liegen, welche zugleich durch den Durchschnitt der beiden Strahlen GB, GB, geht, so durchschneiden sich die übrigen Seiten dieser Vierecke, BB,, CC, u. s. w. in einem und demselben Punkte.

97. Wenn einem Dreiecke ABC ein anderes DEF (Fig. 44) perspektivisch einbeschrieben ist, so ist auf jedem Projektions-

Wenn einem Dreiecke ABC ein anderes DEF perspektivisch einbeschrieben ist, so bildet die Gerade, welche die Durchschnitte

strahle z. B. AE ein harmonisches Gebilde bestimmt.

der homologen Seiten verbindet, mit zwei Dreiecksseiten und dem Strahle, welcher einen der Durchschnitte zweier homologer Seiten mit dem Projektionscentrum verbindet, einen harmonischen Strahlenbüschel.

98. Wenn einem Kreise ein Dreieck abc einbeschrieben und demselben Kreise ein anderes ABC umbeschrieben ist, dessen Seiten durch die Ecken des einbeschriebenen gehen, so

liegen die beiden Dreiecke perspektivisch.

liegen die Durchschnitte je zweier Gegenseiten in einer Geraden.

Beweis. Fig. 45. Weil die Seiten des umbeschriebenen Dreiecks Tangenten des Kreises sind, so ist Ab . Ca . Bc = Ac . Ba . Cb, woraus (87) folgt, daß die Dreiecke ABC und abc perspektivisch liegen und hieraus folgt ferner (89), daß je zwei homologe (oder Gegen-) Seiten sich in Punkten schneiden, welche in einer und derselben Geraden liegen.

99. Es seien (Fig. 45) a, b, c drei beliebige Punkte in dem Umfange eines Kreises. Zieht man nun durch diese drei Punkte Tangenten an den Kreis, bezeichnet den Durchschnittspunkt der beiden durch a und b gezogenen mit C, verbindet C mit c durch die Linie Cc und zieht mit der durch den Punkt c an den Kreis gezogenen Tangente eine beliebige Parallele, welche die von a und b nach c gezogenen Linien ac, bc in e und f schneidet, so wird, wie auch diese Parallele gezogen werden mag, die Linie ef von der Linie Cc halbirt *).

Beweis. Die durch die Punkte a, b, c gezogenen Tangenten bilden ein Dreieck ABC, welches mit dem Dreieck abc perspektivisch liegt (98). Bezeichnet man den Durchschnitt

*) Siehe Grunerts „Archiv der Math. und Phys." III. pag. 101.

der Linien **Bb** und **ac** mit **m**, so bilden die Punkte **B**, **m**, **o**, **b** ein harmonisches Gebilde (97); folglich ist **cb**, **co**, **cm**, **cB** ein harmonischer Strahlenbüschel. Da nun **ef** mit dem Strahle **cB** parallel ist, so wird (93. 3.) die Linie **ef** von dem Strahle **co** halbirt.

100. Wenn einem Dreiecke ein perspektivisches Dreieck einbeschrieben ist, so ist jeder Durchschnittspunkt homologer Seiten in jeder derselben von den Eckpunkten durch den Projektionsstrahl, welcher durch die den Seiten gegenüber liegende Ecken der Dreiecke geht, harmonisch getrennt.

Werden die drei Seiten eines Dreiecks durch eine Gerade geschnitten, welche durch keinen Eckpunkt geht und zu jedem Durchschnittspunkt in jeder Seite der Punkt gesucht, von welchem ersterer durch die beiden in derselben Seite liegenden Ecken des Dreiecks harmonisch getrennt ist, so sind die so bestimmten Punkte die Ecken eines zum gegebenen perspektivischen Dreiecks.

101. Ist einem Dreiecke ein anderes perspektivisch einbeschrieben, und bewegt sich letzteres so, daß eine Ecke fest bleibt, während sich das Projektionscentrum in dem Strahle bewegt, welcher jene feste Ecke mit der Gegenecke des umbeschriebenen Dreiecks verbindet, so dreht sich die Gerade, welche die drei Durchschnitte homologer Seiten verbindet, um einen dieser Durchschnittspunkte als Mittelpunkt. Dieser feste Punkt liegt mit dem festen Eckpunkt des einbeschriebenen Dreiecks in einerlei Seite des umbeschriebenen.

102. **Pol und Polare.** Es seien aus einem Punkte **M** (Fig. 46) an einen Kreis, dessen Mittelpunkt **O** ist, zwei Tangenten gezogen. Verbindet man den Punkt **M** mit dem Mittelpunkte **O** durch die Gerade **MO**, welche den Kreis in **C** und **D** schneidet, so sind diese beiden Punkte **C** und **D** durch den Punkt **M** und den Durchschnittspunkt **P** der Geraden **MD** und **AB** harmonisch getrennt.

Beweis. Denkt man sich AC und AD gezogen, so wird der Winkel MAP durch die Linie AC halbirt, und weil AD auf AC senkrecht steht, so folgt der Satz (93).

103. Es seien im Kreise (Fig. 46 und 47) ein Durchmesser, aus einem Punkte M desselben Tangenten an den Kreis und durch die Berührungspunkte eine Gerade AB gezogen, welche den Durchmesser in P schneidet; ebenso sei in M auf dem Durchmesser eine Senkrechte MR errichtet.

Jede durch den Punkt M gezogene und den Kreis schneidende Linie bildet ein harmonisches gerades Gebilde; und es sind die Durchschnittspunkte des Kreises durch die Linie AB und den Punkt M harmonisch getrennt.

Jede durch den Punkt P gezogene und den Kreis schneidende Linie bildet ein harmonisches gerades Gebilde; und es sind die Durchschnittspunkte des Kreises durch die Linie MR und den Punkt P harmonisch getrennt.

Beweis des links stehenden Satzes.

Es sei durch M beliebig die Sekante ME, welche den Kreis in F und E und die Geraden DE und CF gezogen, welche sich in einem Punkte N schneiden mögen. Zieht man DF und EC, welche sich in L schneiden, und dann NL, so steht NL auf MD senkrecht, weil die Linien CE, DF, NP die Höhen des Dreiecks CDN sind. Im vollständigen Vierseite DNFM muß daher die Linie NL die Gerade DM in einem Punkte treffen, welcher zu C, M, D der vierte harmonische Punkt ist. Weil aber P dieser Punkt ist, so muß die Linie NL durch den Punkt P gehen und mit der Senkrechten AB zusammenfallen. In demselben Vierecke liegen nun auch die Punkte E, Q, F, M harmonisch, w. z. b. w.

Der rechts stehende Satz wird ebenso bewiesen, indem man, wie vorher zeigt, daß die Linien DE, FC sich in einem Punkte N der Geraden MR schneiden.

Weil nun jede aus einem $\left\{\begin{matrix}\text{außerhalb}\\ \text{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ eines Kreises liegenden Punkte gezogene Gerade durch diesen Punkt, den Kreis und eine bestimmte $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{außerhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises liegende Gerade harmonisch getheilt wird, so nennt man in beiden Fällen den Punkt „den Pol“ und die Gerade, welche ihm zugeordnet ist, „die Polare“.

Hieraus folgen nun leicht folgende Sätze:

Die Polare eines außerhalb eines Kreises liegenden Punktes (Poles) ist diejenige Gerade, welche die Berührungspunkte der Tangenten, welche vom Pole an den Kreis gezogen sind, verbindet. Die Polare steht zugleich auf dem durch den Pol gehenden Durchmesser senkrecht.

Die Polare eines innerhalb eines Kreises liegenden Punktes (Poles) ist diejenige Gerade, welche auf dem durch den Pol gehenden Durchmesser senkrecht steht in demjenigen Punkte, in welchem sich zwei Tangenten schneiden, die durch die Durchschnittspunkte einer durch den Pol gehenden, auf demselben Durchmesser senkrecht stehenden Geraden mit dem Kreise bestimmt sind.

104. Die Gerade, welche zwei Pole verbindet, ist die Polare des Durchschnitts der jenen Polen zugehörigen Polaren.

Der Punkt, in welchem sich zwei Polaren schneiden, ist der Pol der Geraden, welche die beiden Pole jener Polaren verbindet.

Die Polaren aller Punkte, welche in einer Geraden liegen, durchschneiden sich in einem und demselben Punkte. Dieser Punkt ist der Pol jener Geraden.

Die Pole aller Geraden, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden, liegen in einer Geraden. Diese Gerade ist die Polare jenes Punktes.

Bewegt sich ein Punkt in

Dreht sich eine Gerade

einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol jener Geraden.

um einen festen Punkt, so bewegt sich ihr Pol in der Polare jenes Punktes.

105. Sind aus verschiedenen Punkten, welche in einer Geraden liegen, Tangenten an den Kreis gezogen, so durchschneiden sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte in einem Punkte, dem Pole jener Geraden.

Sind durch einen Punkt beliebige Sehnen (oder Sekanten) gezogen, so liegen die Durchschnitte entsprechender Tangentenpaare an den Endpunkten der Sehnen in einer Geraden, der Polare jenes Punktes.

106. Sind durch einen innerhalb oder außerhalb eines Kreises liegenden Punkt beliebig viele Sekanten gezogen und die durch die Durchschnittspunkte je zweier derselben bestimmten Vierecke vollendet, so liegen die Durchschnitte je zweier Gegenseiten in einer Geraden und zwar in der Polare jenes Punktes (103).

107. Der Pol einer Tangente ist der Berührungspunkt. Der Pol eines Durchmessers ist ein unendlicher ferner Punkt. Die Pole paralleler Geraden liegen in dem auf den Geraden senkrechten Durchmesser.

108. Ist einem Kreise ein Dreieck einbeschrieben, so liegen die Durchschnitte der drei Seiten mit den Tangenten an den Gegenecken in einer Geraden.

Ist einem Kreise ein Dreieck umbeschrieben, so schneiden sich die Geraden, welche die Ecken desselben mit dem Berührungspunkt verbinden, in einem und demselben Punkte.

Beweis. Daß die Dreiecke abc, ABC (Fig. 45) perspektivisch liegen, ist in 98 bewiesen. Dann folgt der rechts stehende Satz auch aus 104. Denn weil b der Pol von AC und B der Pol von ac, so ist der Durchschnitt M von AC und ac der Pol von Bb. Ebenso ist N der Pol von Cc und P der Pol von Aa. Weil diese drei Linien

Bb, Cc, Aa sich in einem Punkte durchschneiden, so liegen die Pole dieser Polaren in einer Geraden.

109. Ist einem Kreise ein Sechseck einbeschrieben, so liegen die Durchschnitte je zweier Gegenseiten (der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten) in einer Geraden.

Ist einem Kreise ein Sechseck umbeschrieben, so schneiden sich die drei Geraden, welche gegenüberliegende Eckpunkte verbinden, in einem und demselben Punkte.

Beweis. Fig. 48. Zum links stehenden Satze.

Es sei ABCDEF das einbeschriebene Sechseck; die Seite BC schneidet verlängert die Seiten AF und DE in m und n und es bilden diese drei Linien das Dreieck mno, welches von den Transversalen MD, NA, BF geschnitten wird. Hieraus hat man

$$Mo \cdot mC \cdot nD = Mm \cdot oD \cdot Cn$$
$$Nn \cdot oA \cdot mB = oN \cdot mA \cdot nB$$
$$mP \cdot oF \cdot nE = nP \cdot oE \cdot mF.$$

Es ist aber $mC \cdot mB = mF \cdot mA$
$$oA \cdot oF = oD \cdot oE$$
$$nE \cdot nD = nB \cdot nC.$$

Folglich ist $Mo \cdot Nn \cdot mP = Mm \cdot No \cdot nP$.

Weil nun die Punkte M, N, P unparmal auf den Verlängerungen der Seiten liegen, so liegen auch die Punkte M, N, P in einer Geraden.

Nun ist ferner AF die Polare von a, CD die Polare von d, folglich ad die Polare von M. Ebenso sind die Punkte N, P die Polaren der Geraden be, cf. Weil nun die Pole M, N, P in einer Geraden liegen, so schneiden sich die Polaren ad, be, cf in einem Punkte O.

Anmerkung. Wohl zu bemerken ist, daß diese Sätze nicht allein für das gewöhnliche Sechseck mit ausspringenden Winkeln, sondern überhaupt für die sechs Linien, welche sechs beliebige im Kreisumfange liegende Punkte verbinden

oder denselben in diesen Punkten berühren, gelten. In Fig. 49 sind die sechs auf einander folgenden Geraden mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet, von welchen die Durchschnitte A, B, C von je zwei gegenüberliegenden Linien in einer Geraden liegen *).

110. Fällt der Punkt A mit F zusammen, so geht die Sehne AF in die Tangente des Punktes A über, und man erhält:

In jedem einem Kreise einbeschriebenen Fünfecke liegen die Durchschnitte zweier nicht an einander liegender und ebenso der fünften Seite mit der Tangente, welche durch den gegenüberliegenden Eckpunkt geht, in einer Geraden.

In jedem einem Kreise umbeschriebenen Fünfecke durchschneiden sich die Geraden, welche gegenüberliegende Eckpunkte und den fünften Eckpunkt mit dem Berührungspunkt der Gegenseite verbinden, in einem Punkte.

Es gilt für das Fünfeck dieselbe Bemerkung, wie für das Sechseck.

111. Fallen zwei Paare von den sechs Eckpunkten des Sechsecks zusammen, so erhält man ähnliche Sätze, z. B. (Fig. 50 und 51):

Zieht man in einem Vierecke im Kreise an zwei auf einander folgende Punkte Tangenten, so liegen der Durchschnitt der Seite, welche die beiden Punkte verbindet, mit der Gegenseite und die Durchschnitte der andern Seiten mit den Tangenten, welche durch den nächsten Eckpunkt gehen, in einer Geraden.

Verbindet man im Vierecke, welches einem Kreise umbeschrieben ist, den ersten und dritten Eckpunkt, ebenso die beiden übrigen Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten, so schneiden sich diese drei Diagonalen immer in einem Punkte.

---

*) Siehe „Arch. d. Math. u. Phys.“ III. 386. und VI. 87.

112. Ebenso findet man:

In jedem einem Kreise einbeschriebenen Vierecke liegen die Durchschnitte der Gegenseiten und die Durchschnitte je zweier Tangenten an den Gegenecken in einer Geraden.

In jedem einem Kreise umbeschriebenen Vierecke durchschneiden sich die Geraden, welche die Gegenecken verbinden und die Geraden, welche gegenüberliegende Berührungspunkte verbinden, in einem und demselben Punkte.

113. Ähnlichkeitspunkt. Mit dem Vorhergehenden hängt die Lage ähnlicher Gebilde wesentlich zusammen. Man nennt nemlich zwei gerade Gebilde A, B, C, D und a, b, c, d einander ähnlich, wenn beide parallele Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels O sind. Hieraus folgt sogleich, daß immer zwei Paare homologer Stücke in einerlei Verhältniß stehen. Der Mittelpunkt des Strahlenbüschels heißt Ähnlichkeitspunkt der beiden geraden Gebilde. Offenbar können zwei solche gerade Gebilde unendlich viele Ähnlichkeitspunkte haben, wenn das eine Gebilde mit dem andern parallel fortbewegt wird (Fig. 52).

Sind zwei ebene Figuren einander ähnlich und sind zwei homologe Seiten mit einander parallel, so gilt dies auch für die übrigen homologen Seiten. Denn weil ähnliche Figuren sich in ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, so braucht der Beweis blos für letztere geführt zu werden. Derselbe folgt aber aus 65.

114. Die Ähnlichkeitspunkte von drei parallelen Gebilden liegen immer in einer Geraden.

Beweis. Fig. 53. Es seien die Gebilde AB, ab, $a_,b_,$ der Lage nach auf einander bezogen. Weil diese drei Linien parallel sind, so liegen (89) die Dreiecke $Aaa_,$, $Bbb_,$ perspektivisch, folglich die Durchschnitte der Linien Aa, Bb; $Aa_,$, $Bb_,$; $aa_,$, $bb_,$ in einer Geraden. Diese Gerade heißt Ähnlichkeitsaxe.

Man erhält überhaupt sechs verschiedene Ähnlichkeitspunkte, wenn man berücksichtigt, ob die drei Gebilde so auf einander bezogen sind, daß sie einstimmig oder entgegengesetzt parallel liegen. Es können nemlich die Punkte

A, a, a, und B, b, b,
A, a, b, und B, b, a,
A, a,, b und B, a, b,
A, b, b, und B, a, a,

einander entsprechen, und weil je drei dieser Ähnlichkeitspunkte in einer Geraden liegen, so sind dieselben die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits.

115. Wird in dem Gebilde AB ein Punkt C bestimmt, so findet man den entsprechenden, welcher in dem Gebilde ab oder a,b, liegt, wenn man MC, NC zieht. Die Punkte Pc,c liegen dann ebenfalls in einer Geraden.

116. Zwei Kreise, welche ähnliche Figuren sind, haben zwei Ähnlichkeitspunkte, von welchen der eine der äußere (direkte), der andere der innere (inverse) Ähnlichkeitspunkt heißt. Zwei parallele Durchmesser in beiden Kreisen sind nemlich zwei homologe Diagonalen in beiden Figuren. Die Verbindungslinien der Endpunkte eines Paares solcher paralleler Durchmesser und ebenso eines zweiten Paares, indem man dieselben einmal als einstimmig und dann als entgegengesetzt parallel betrachtet, bestimmen durch ihre Durchschnitte die beiden Ähnlichkeitspunkte. Statt des einen Paares paralleler Durchmesser kann man die Centrale wählen. Es ist leicht zu beweisen, daß jede Gerade, welche durch einen dieser beiden Punkte gezogen ist und beide Kreise schneidet, in denselben zwei Paare von Punkten so bestimmt, daß die zugehörigen Durchmesser parallel sind.

117. Jede Tangente, welche aus einem der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise an einen Kreis gezogen ist, berührt zugleich den zweiten Kreis. Um daher an zwei Kreise gemeinschaftliche Tangenten zu ziehen, suche man die Ähnlichkeitspunkte beider Kreise und ziehe aus jedem derselben Tangenten an den einen

Kreis, wodurch man im Allgemeinen vier Tangenten erhalten kann.

118. Die beiden Mittelpunkte zweier Kreise sind durch die beiden Ähnlichkeitspunkte harmonisch getrennt.

Denn es seien M und m die Mittelpunkte, P und p der äußere und innere Ähnlichkeitspunkt, so ist, wenn R und r die Radien der Kreise M und m bezeichnen, $\frac{PM}{Pm} = \frac{R}{r} = \frac{pM}{pm}$.

119. Wenn sich zwei Kreise von Außen berühren, so ist ihr Berührungspunkt der innere Ähnlichkeitspunkt, und berühren sich dieselben von innen, so ist der Berührungspunkt der äußere Ähnlichkeitspunkt. Concentrische Kreise haben den gemeinschaftlichen Mittelpunkt als den einzigen Ähnlichkeitspunkt.

120. Liegen drei Kreise so, daß je zwei derselben zwei Ähnlichkeitspunkte haben, so liegen die drei äußern Ähnlichkeitspunkte in einer Geraden, und ebenso jede äußere mit den zwei innern, welche nicht mit ihm zu einerlei Kreisen gehören, ebenfalls in einer Geraden. — Der Satz folgt aus 114. Oder:

Fig. 55. Es seien M, O, P die Mittelpunkte dreier Kreise; A und J seien die Ähnlichkeitspunkte der Kreise M und O, ebenso $A_{,}$, $J_{,}$ die zu den Kreisen M und P, und $A_{,,}$, $J_{,,}$ die zu den Kreisen O und P gehörigen Ähnlichkeitspunkte. Auch seien r, $r_{,}$, $r_{,,}$ die Radien der Kreise M, O, P, so ist

$$\frac{AM}{AO} = \frac{r}{r_{,}};\quad \frac{A_{,,}O}{A_{,,}P} = \frac{r_{,}}{r_{,,}};\quad \frac{A_{,}P}{A_{,}M} = \frac{r_{,,}}{r}.$$

Durch Multiplikation folgt:

$$AM \cdot A_{,,}O \cdot A_{,}P = AO \cdot A_{,,}P \cdot A_{,}M.$$

Weil nun die Punkte A, $A_{,}$, $A_{,,}$ sämmtlich auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks MOP liegen, so liegen dieselben in einer Geraden.

Hieraus folgt sogleich, daß MA, MA, Schnitte eines und desselben harmonischen Strahlenbüschels sind, dessen

Mittelpunkt $A_{,,}$ ist, weshalb $A_{,,,}$ J, $J_{,}$ in einer Geraden liegen. Dasselbe gilt von den Punkten $A_{,}$, $J_{,,}$, $J_{,}$ und von den Punkten A, $J_{,,}$, $J_{,}$. In Bezug auf die Punkte A, $A_{,}$, $A_{,,}$ läßt sich der Satz auch so aussprechen:

121. Liegen drei Kreise ganz außerhalb einander, so liegen die drei Durchschnitte von je zwei äußern Tangentenpaaren in einer und derselben Geraden.

122. Werden um dieselben Mittelpunkte M und m (54) beliebig viele Kreise beschrieben, deren Radien sämmtlich proportionirt sind, so haben sämmtliche Kreise einerlei Ähnlichkeitspunkte. Folgt aus 115.

123. Mit Hülfe dieser Sätze können die oben angeführten Lehrsätze über die dem Kreise ein- und umbeschriebenen Vielecke ebenfalls leicht bewiesen werden. Denkt man sich nemlich (Fig. 45) um A, B, C als Mittelpunkte drei Kreise bezüglich mit den Radien Ab, Ba, Ca beschrieben, so berühren sich dieselben in den Punkten b, c, a. Letztere Punkte sind daher in Bezug auf die genannten drei Kreise innere Ähnlichkeitspunkte, aus denen man die äußern M, N, P erhält; letztere liegen aber in einer Geraden. Folglich: Die drei Durchschnitte der Seiten eines dem Kreise einbeschriebenen Dreiecks mit den Tangenten, welche durch die Gegenecken gezogen sind, liegen in einer Geraden.

Es sei ferner (Fig. 56) ABCD ein dem Kreise einbeschriebenes Viereck und abcd das zugehörige umbeschriebene. Betrachtet man die Kreise c, b, d, so sind B und C innere Ähnlichkeitspunkte, folglich liegt der zu b und d gehörige äußere sowohl in BC als in der Centrale bd, also im Durchschnitte M derselben. Betrachtet man ebenso die Kreise a, b, d, so folgt, daß der zu b und d gehörige äußere Ähnlichkeitspunkt in bd und AD liegen müsse. Da nun M der zu b und d gehörige äußere Ähnlichkeitspunkt ist, so muß AD durch M gehen, d. h. es durchschneiden sich die drei Linien AD, BC, bd in einem

Punkte M. — Dasselbe ist mit den Linien AB, DC, ac der Fall. — In Bezug auf die Kreise P, N, d ist D ein äußerer, C ein innerer Ähnlichkeitspunkt, folglich muß der nächste innere in CD und PN liegen. Aber in Bezug auf die Kreise P, N, b ist B ein innerer, A ein äußerer Ähnlichkeitspunkt, folglich muß der den Kreisen P, N zugehörige innere Ähnlichkeitspunkt in AB und PN liegen. Da derselbe nun auch CD liegen muß, so müssen sich die drei Linien AO, DO, PN in einem Punkte schneiden, d. h. der Durchschnitt O der Linien AB, CD liegt mit P, N in einer Geraden. — Ebenso beweist man, daß P, N, M, d. h. daß P, O, N, M in einer Geraden liegen, und ganz auf ähnliche Weise, daß AC, BD, ac, bd in einem Punkte sich schneiden. Hierdurch sind die beiden Sätze bewiesen:

In jedem Vierecke im Kreise liegen die Durchschnitte der Gegenseiten und die Durchschnitte je zweier Tangenten an den Gegenecken in einer Geraden.

In jedem einem Kreise umbeschriebenen Vierecke durchschneiden sich die Geraden, welche die Gegenecken und gegenüberliegenden Berührungspunkte verbinden, in einem und demselben Punkte.

Auch ist aus vorhergehender Betrachtung klar:

Wenn zwei Kreise von einem dritten Kreise berührt werden, so liegen die beiden Berührungspunkte des letztern mit dem äußern Ähnlichkeitspunkte der erstern in einer Geraden, wenn die Berührung zugleich von außen, oder zugleich von innen stattfindet. Im entgegengesetzten Falle liegt der innere Ähnlichkeitspunkt in jener Geraden.

Es seien ferner (Fig. 48) ABCDEF und abcdef zwei dem Kreise ein- und umbeschriebene Sechsecke, von welchen das letztere durch die Ecken des erstern geht. Man verlängere die gegenüberliegenden Tangenten ab und de, bc und ef, cd und fa, bis sie sich in G, G,, G,, schneiden. In Bezug auf die Kreise G, G,, b ist A äußerer Ähnlich-

keitspunkt der Kreise b und G, und B ein innerer für die Kreise G, und b, folglich liegt im Durchschnitt von AB und GG, der innere der Kreise G, G,. Wegen der Kreise G, G,, e ist E äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise e, G,, D ein innerer für die Kreise G, e, folglich ist der Durchschnitt der Linien AB und DE, d. h. N ein innerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise G und G,. Ebenso zeigt man, daß der Durchschnitt P der Linien BC und EF ein innerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise G, G,, und der Durchschnitt M der Linien CD und AF ein äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise G und G,, ist. Daher müssen die Ähnlichkeitspunkte M, N, P in einer Geraden und endlich in derselben auch die Punkte G, G,, G,, liegen. D. h.:

Ist einem Kreise ein Sechseck um- und einbeschrieben, so daß die Berührungspunkte des erstern die Ecken des letztern sind, so liegen die Durchschnitte gegenüberliegender Seiten und Tangenten in einer Geraden.

Ist einem Kreise ein Sechseck um- und einbeschrieben, so daß die Berührungspunkte des erstern die Ecken des letztern sind, so durchschneiden sich die Geraden, welche gegenüberliegende Ecken des ein- und umbeschriebenen Sechsecks verbinden, in einerlei Punkt.

Der Satz rechts folgt unmittelbar aus dem Satze links oder kann auch auf dieselbe Weise bewiesen werden.

Anmerkung. Jede Gerade, welche durch einen Ähnlichkeitspunkt geht, heißt Ähnlichkeitslinie. Schneidet eine solche den einen Kreis, so schneidet sie offenbar auch den zweiten. Auch schneidet sie in beiden Kreisen gleiche Bogen ab u. s. w.

124. Potenzlinie. Mit dem Vorhergehenden hängt noch innig die Betrachtung des geometrischen Ortes des Punktes, von welchem an mehre Kreise gleiche Tangenten gezogen werden können und einiger damit zusammenhängender merkwürdiger Punkte und Linien zusammen. — Werden in einem Kreise

ein beliebiger Punkt P angenommen und durch denselben Sehnen gezogen, so sind sämmtliche Rechtecke aus den Abschnitten einer jeden Sehne von constanter Größe und zwar dem Quadrate der Hälfte derjenigen Sehne gleich, welche im Punkte selber halbirt wird, oder auf dem durch denselben Punkt gehenden Durchmesser senkrecht steht. Liegt der gegebene Punkt außerhalb des Kreises, so sind sämmtliche Rechtecke aus den Abschnitten einer jeden Sekante (immer vom gegebenen Punkte bis zu den Durchschnitten mit dem Kreise gerechnet) ebenfalls constant und dem Quadrate der Tangente gleich, welche aus dem Punkte an den Kreis gezogen werden kann. Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises mit r, die Entfernung des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte mit e, so ist das constante Quadrat im ersten Falle ausgedrückt durch $r^2 - e^2$, im zweiten aber durch $e^2 - r^2$. Jenes constante Quadrat (oder statt dessen die angegebene Quadratdifferenz) heißt nun die Potenz des gegebenen Punktes P in Bezug auf den Kreis. Eine Hauptfrage, welche sich dem Vorhergehenden anschließt, ist nun folgende: Wenn zwei Kreise gegeben sind, den Ort des Punktes zu bestimmen, von welchem an dieselben gleiche Tangenten gezogen werden können.

Nun ist aus den ersten Elementen bekannt:

1) Wenn zwei Kreise sich berühren, so ist die gemeinschaftliche Tangente der Ort des verlangten Punktes. Bezeichnet man ferner mit r, r′ die Radien und mit e, e′ bezüglich die Entfernungen eines beliebigen Punktes der gemeinschaftlichen Tangente von den Kreisen, so ist offenbar $e^2 - r^2 = e'^2 - r'^2$.

2) Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist die gemeinschaftliche Sehne (ihre Verlängerung) der Ort gleicher Tangenten. Für jeden Punkt derselben gilt ebenfalls $e^2 - r^2 = e'^2 - r'^2$.

3) Liegen die Kreise außer einander, so seien M und N die Mittelpunkte beider Kreise und von dem außerhalb beider Kreise liegenden Punkt P auf MN eine Senkrechte PQ gefällt; ferner sei PM = e, PN = e′. Wenn nun P

im verlangten geometrischen Orte liegen soll, so muß $MQ^2 - r^2 = QN^2 - r'^2$ oder $MQ^2 - QN^2 = r^2 - r'^2$ sein. Bezeichnet man MQ mit x und MN mit a, so erhält man $x = \frac{r^2 - r'^2 + a^2}{2a} = MQ$ und $NQ = \frac{r'^2 - r^2 + a^2}{2a}$. Da man nun für jeden im verlangten geometrischen Orte liegenden Punkt P die Entfernung seiner orthogonalen Projektion Q von den Mittelpunkten durch eine und dieselbe constante Größe $\frac{r^2 - r'^2 + a^2}{2a}$ und $\frac{r'^2 - r^2 + a^2}{2a}$ bestimmen muß, so folgt daraus, daß der gesuchte Punkt P immer in dem im bestimmten Punkte Q errichteten Lothe liegen muß, d. h. daß dieses Loth der gesuchte Punkt selbst sein muß. Da sich ferner leicht zeigen läßt, daß sowohl $\frac{r^2 - r'^2 + a^2}{2a} > r$ als $\frac{r'^2 - r^2 + a^2}{2a} > r'$, so folgt hieraus die Stetigkeit des Ortes für alle Kreise, die ganz außer einander liegen.

4) Liegen die Kreise so, daß der eine den andern ganz einschließt, so zeigt man ebenso, daß Q in der Centrale außerhalb des größeren Kreises liegt.

Der Ort, von welchem man nun an zwei Kreise gleiche Tangenten ziehen kann, heißt Potenzlinie der beiden Kreise oder Radikalare.

125. Man findet die Radikalare leicht,

a) wenn man an die beiden Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zieht und dieselbe (in Rücksicht auf die beiden Berührungspunkte) halbirt. Fällt man von der Mitte derselben eine Senkrechte auf die Centrallinie, so ist dieselbe die verlangte Potenzlinie.

b) Man durchschneide beide Kreise mit einem beliebigen dritten

Kreis; der Durchschnitt der gemeinschaftlichen Sehnen des dritten und ersten, dann dritten und zweiten Kreises ist ein Punkt der Potenzlinie.

126. Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Beweis. Es seien die Kreise mit K, $K_{,}$, $K_{,,}$ und die Potenzlinie der Kreise K und $K_{,}$ mit p, der Kreise K und $K_{,,}$ mit q, der Kreise $K_{,}$, $K_{,,}$ mit r bezeichnet. Der Durchschnitt von p und q bietet für die Kreise K, $K_{,}$, $K_{,,}$ gleiche Potenzen dar, folglich muß dieser Durchschnitt auch in der Potenzlinie r liegen; d. h. p, q, r schneiden sich in einem Punkte. — Hieraus folgt:

Die gemeinschaftlichen Sehnen dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

Die gemeinschaftlichen Tangenten dreier sich berührender Kreise schneiden sich in einem Punkte. (Dieser Durchschnittspunkt der Potenzlinien dreier Kreise heißt Potenzcentrum.)

127. Werden zwei feste Kreise von beliebigen andern Kreisen durchschnitten, so liegen die Durchschnitte der Sehnen, welche jeder der letztern mit erstern gemeinschaftlich hat, in einer Geraden (der Potenzlinie der beiden erstern Kreise).

128. Wenn drei Kreise von einem vierten sämmtlich von außen und von einem fünften sämmtlich von innen berührt werden, so liegen die äußern Ähnlichkeitspunkte der drei erstern Kreise in der Potenzlinie der beiden letztern.

Beweis. Fig. 57. Es seien A, B, C die gegebenen Kreise, welche von dem Kreise P einschließend und von dem Kreise Q ausschließend berührt werden. Der äußere Ähnlichkeitspunkt M der Kreise A und B liegt im Durchschnitte der Linien ab, a′b′, welche die Berührungspunkte a, b und a′, b′ der Kreise A und B mit den Kreisen P und Q verbinden (123).

Ebenso liegt N im Durchschnitte von ac und a′c′

und O im Durchschnitte von bc und b'c'. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß wenn M ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise A und B und Ma', Ma Transversalen dieser Kreise sind, auch immer Mb . Ma = Mb' . Ma' sein müsse. Jedes dieser Produkte ist aber der Potenz der Kreise P und Q gleich; d. h. M liegt in der Potenzlinie der Kreise P und Q. Ebenso wird gezeigt, daß auch die Ähnlichkeitspunkte N und O in der Potenzlinie der Kreise P und Q liegen müssen.

Ebenso wird gezeigt:

Wenn unter drei gegebenen Kreisen zwei von einem vierten von außen und der dritte von innen, und dieselben zwei von einem fünften von innen und der dritte von außen berührt werden, so liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden erstern Kreise und die innern Ähnlichkeitspunkte eines jeden derselben mit dem dritten in der Potenzlinie der beiden berührenden Kreise.

129. Wenn drei Kreise von acht andern aus- und einschließend berührt werden, so sind ihre Ähnlichkeitsaxen zugleich die Potenzlinien der sie berührenden Kreise und die Centrallinien von je zweien der letztern, sind die Lothe, welche aus dem Potenzcentrum auf die vier Ähnlichkeitsaxen gefällt sind.

130. Ebenso kann man auch von der Potenzlinie eines Kreises in Bezug auf einen bestimmten festen Punkt sprechen. Man erhält dann die Aufgabe, den Ort des Punktes zu suchen, aus welchem man an einen Kreis Tangenten ziehen kann, deren Länge der Entfernung des Punktes von einem festen zweiten Punkte gleich ist. Dieser Ort ist ebenfalls eine Gerade, welche auf der Verbindungslinie des festen gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte des Kreises senkrecht steht. Bezeichnet man letztere Gerade mit a, den Radius des Kreises mit r, so ist die Entfernung des Durchschnitts des gesuchten Ortes mit der Geraden a

vom Mittelpunkt des Kreises durch $\frac{\pm a^2 + r^2}{2a}$ ausgedrückt. Legt man durch den festen Punkt einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis schneidet, zieht durch denselben festen Punkt an ersteren eine Tangente und die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise, so ist der Durchschnitt der Sehne mit der Tangente ein Punkt des gesuchten Ortes. Man erhält daher letzteren selbst, wenn man aus jenem Durchschnittspunkte ein Loth auf die Gerade a fällt.

III. Geometrische Construktionen.

1. Einen Punkt zu finden, welcher von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat (geometrischer Ort).

2. Einen Punkt zu finden, welcher von zwei gegebenen Punkten dieselbe Entfernung hat (g. O.).

3. In einem Kreise oder in einer ganz beliebigen krummen Linie einen Punkt zu finden, welcher von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat.

4. Zwei Punkte A und B sind gegeben; einen dritten Punkt C zu finden, dessen Entfernungen von A und B bezüglich den gegebenen Linien m und n gleich sind.

5. Eine Gerade zwei-, drei-, viermal länger zu machen.

6. Eine Gerade zu halbiren. Dieselbe in 4, 8, 16 u. s. w. Theile zu theilen.

7. Das arithmetische Mittel von zwei Geraden zu finden.

8. Einen Winkel in 2, 4, 8 u. s. w. Theile zu theilen.

9. Durch einen in einer Geraden liegenden Punkt eine Senkrechte zu ziehen.

10. Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

11. An einer Geraden in einem gegebenen Punkte einen Winkel anzulegen, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.

12. An dem Schenkel eines Winkels einen gleichen Winkel als Wechselwinkel anzulegen.

13. In einer Geraden liegt ein Punkt A und außerhalb derselben ein Punkt B; in der Geraden einen dritten Punkt C zu finden, so daß

a) AC = BC

b) AC — BC = einer gegebenen Geraden m

c) BC — AC = m sei.

14. Eine Gerade und außerhalb derselben zwei Punkte sind gegeben; in der Geraden den Punkt zu finden, welcher von beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist.

15. Einen Punkt zu finden, welcher von drei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist, wenn letztere nicht in einer Geraden liegen.

16. Einen Punkt zu finden, welcher von zwei sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt ist (2 g. O.).

17. Es schneiden sich drei Gerade gegenseitig; einen Punkt zu finden, welcher von demselben gleichweit entfernt ist. (Es gibt vier Punkte.)

18. Einen Punkt zu finden, welcher von zwei Parallelen gleich weit entfernt ist (g. O.).

19. Zwei Parallelen werden von einer Geraden geschnitten; den Punkt zu finden, welcher von den drei Linien gleich weit entfernt ist.

20. Einen Punkt zu finden, welcher von einer Geraden eine bestimmte Entfernung hat.

21. Einen Punkt zu finden, welcher

a) von zwei Geraden eine bestimmte Entfernung hat;

b) von der einen Geraden um die Länge m und von der andern um die Länge n entfernt ist. (Wie viele Punkte genügen?)

22. Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist.

23. Zwischen zwei Parallelen eine Gerade von bestimmter Länge zu legen.

24. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit einer zweiten Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

25. Ein Winkel und zwischen seinen Schenkeln ein Punkt seien gegeben; durch den Punkt eine Gerade zu legen, so daß ein gleichschenkeliges Dreieck entsteht.

26. Eine begrenzte Gerade so zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels zu legen, daß ein gleichschenkeliges Dreieck entsteht.

---

27. Durch drei Punkte einen Kreis zu legen.

28. Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei Punkte geht.

29. Ein Kreisbogen ist gegeben; den zugehörigen Kreis zu vollenden.

30. Einen Kreisbogen zu halbiren.

31. Über einer Geraden einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher einen gegebenen Winkel enthält.

32. Eine Tangente zu ziehen, welche

a) durch einen gegebenen Punkt der Peripherie,

b) durch einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt geht;

c) mit einer Geraden parallel ist.

Auflösung ad b (blos mit Hülfe des Lineals) (Fig. 58). Ziehe aus dem gegebenen Punkte A wenigstens drei Sekanten ABb, ACc, ADd durch den Kreis, verbinde die gegenüberliegenden Durchschnitte B und c, C und b, D und c, C und d. Durch die Punkte m, n, in welchen sich die Linien Bc, Cb, dann Cd, Dc schneiden, ziehe

bis an den Kreis die Gerade EF, so sind AE, AF die verlangten Tangenten.

33. Von einem Punkte sind an einen Kreis zwei Tangenten gezogen; den Winkel, welchen sie bilden, zu halbiren.

34. Um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, welcher eine Gerade oder einen Kreis berührt.

35. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu beschreiben, welcher

a) eine Gerade (2 g. O.),
b) einen Kreis berührt (2 g. O.);
c) durch einen Punkt geht und einen Kreis berührt (2 Aufl.);
d) zwei Gerade berührt (4 Aufl.);
e) eine Gerade und einen Kreis berührt (4 und 2 Aufl.);
f) zwei Kreise berührt (2 Aufl.);

36. Einen Kreis zu beschreiben, welcher

a) zwei Parallelen (g. O.),
b) zwei sich schneidende Gerade berührt (2 g. O.);
c) drei nicht in einem Punkt sich schneidende Gerade (4 Aufl.);
d) zwei Parallelen und eine dieselben schneidende Gerade berührt (4 Aufl.).

---

37. Eine Gerade in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.

38. Eine Gerade zu theilen, daß sich die Theile verhalten, wie gegebene Linien oder Zahlen.

In der Verlängerung der Geraden gibt es einen zweiten Punkt, dessen Entfernungen von den Endpunkten der gegebenen Geraden in demselben Verhältnisse stehen. Siehe I, 88.

39. Die dritte Proportionale zu den Linien **a**, **b** dann **b**, **a** zu finden.

40. Die vierte Proportionale zu den Linien **a**, **b**, **c**; **a**, **c**, **b**; **b**, **a**, **c**; **b**, **c**, **a**; **c**, **a**, **b**; **b**, **a**, **c** zu construiren.

41. Die Proportion a : b = x : c; a : x = b : c; x : a = b : c zu construiren.

42. Die sogenannte Regel de quinque, de septem ꝛc. zu construiren.

Auflösung. a) Construktion der Proportion

$$\left.\begin{array}{l} A : a \\ B : b \end{array}\right\} = c : x.$$

Fig. 59. Trage auf dem einen Schenkel MN eines Winkels NMO aus dem Scheitel M die Längen MA, Ma, MB, Mb den Linien A, a, B, b gleich auf (oder wenn A, a, B, b Zahlen sind, so mache die Längen MA, Ma, MB, Mb den Zahlen A, a, B, b proportional), und vom andern Schenkel MO schneide Mc = c ab. Verbinde den Punkt c mit A (dem Endpunkte einer Linie im Vordergliede); ziehe durch a (dem Endpunkte einer Linie im Hintergliede) eine Parallele am mit Ac; ziehe mB (verbinde m mit dem Endpunkte einer andern Linie im Vordergliede) und durch b (dem Endpunkte einer Linie im Hintergliede) mit Bm die bx parallel, so ist Mx die gesuchte Linie.

Beweis. Weil MA : Ma = Mc : Mm
MB : Mb = Mm : Mx, so ist

$$\left.\begin{array}{l} MA : Ma \\ MB : Mb \end{array}\right\} = Mc : Mx;$$

welche Proportion mit der gegebenen übereinstimmt.

b) Es sei $\left.\begin{array}{l} A : a \\ B : b \\ C : c \end{array}\right\} = d : x$ zu construiren.

Fig. 60. Trage wie vorhin die Längen A, B, C, a, b, c auf dem einen Schenkel MN eines Winkels NMO und auf dem andern die Linie d von M aus auf. Verbinde d mit A, ziehe durch a mit AD die Parallele Am, verbinde m mit B und fahre wie vorhin fort, so erhält man für x den Werth Mx. –

Der Beweis wird dem vorhergehenden analog geführt und man sieht leicht, wie auf diese Weise noch mehr zusammengesetzte Proportionen construirt werden können.

Ebenso wird eine Linie gefunden, deren Verhältniß zu einer andern gegebenen Linie dem Verhältniß der Quadrate, Cubuse u. s. w. zweier Zahlen oder Linien gleich ist.

43. Das geometrische Mittel zwischen zwei Linien zu finden. (Construktion der mittlern Proportionale.)

Auflösung. a) Fig. 61. Soll das geometrische Mittel der Linien a und b gefunden werden, so schneide man auf einer beliebigen Geraden nach einander die Längen AB, BC den Linien a, b gleich ab, beschreibe über AC einen Kreis und errichte in B auf AC das Loth BD bis zum Durchschnitte D mit dem Kreise, so ist BD die mittlere Proportionale.

b) Fig. 62. Trage die kleinere Linie a in AB auf die größere AC oder b von einem Endpunkte A aus auf, beschreibe über AC einen Kreis, errichte in B auf AC das Loth BD bis zum Durchschnitte D mit dem Kreise, und ziehe AD, so ist diese die mittlere Proportionale zwischen AB und AC.

c) Fig. 63. Trage die kleinere Linie a oder AB auf die größere b oder AC, beschreibe mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, welcher durch die Punkte B und C geht, und ziehe aus A an diesen Kreis eine Tangente AD, so ist AD die mittlere Proportionale zwischen AB und AC. — Diese Methode ist bei Auflösung von vielen Aufgaben mit Vortheil anzuwenden.

44. Eine Gerade so zu theilen, daß das größere Stück derselben die mittlere Proportionale zwischen dem kleinern Theil und der ganzen Linie ist. Oder: eine Linie nach stetiger Proportion zu theilen.

Auflösung. Fig. 64. Errichte in dem einen Endpunkte B der gegebenen Geraden AB eine Senkrechte BC und

mache dieselbe der Hälfte von AB gleich. Mit dieser Hälfte beschreibe um C einen Kreis; ziehe durch A und C die Sekante des Kreises AE, dann EB und zu dieser die FH parallel, so ist BH die mittlere Proportionale BH zwischen AH und AB.

Beweis. Es ist offenbar AB eine Tangente des Kreises, weswegen AF : AB = AB : AE; also auch, weil FE = AB, AF : FE = FE : AE, woraus erhellet, daß die Linie AE in F nach stetiger Proportion getheilt ist. Durch die Parallelen BE, HF wird daher die Linie AB nach demselben Verhältnisse getheilt, d. h. es ist AH : HB = HB : AB.

Auch ist die Linie AB stetig getheilt, wenn man den äußern Abschnitt AF der Sekante AE in AG auf AB abschneidet, wodurch AG die mittlere Proportionale zwischen GB und AB wird. Es ist nemlich AE : AB = AB : AF, oder weil AF = AG ist, AE : AB = AB : AG, folglich auch AE — AB : AB = AB — AG : AG, d. h. AG : AB = BG : AG.

45. Zu den Geraden A, a, B eine vierte Gerade zu finden, deren Quadrat sich zum Quadrat über B verhält, wie die Linie a zur Linie A.

Auflösung. Fig. 65. Auf dem Durchmesser MN eines beliebigen Kreises schneide aus einem Endpunkte M die Stücke MA, Ma gleich den Linien A, a ab; errichte in A und a auf MN die Senkrechten AC, aD bis zum Durchschnitte C, D mit dem Kreise; ziehe MC, MD; schneide auf MC die Linie MB der Linie B gleich ab und ziehe durch B die Bx mit CD parallel, so ist Mx die verlangte Linie.

Beweis. Weil MA : Ma = $MC^2 : MD^2$ und MC : MD = MB : Mx, so ist auch MA : Ma = $MB^2 : Mx^2$ oder A : a = $B^2 : x^2$.

46. Eine gegebene Gerade so zu theilen, daß der eine Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen dem andern Abschnitte und einer gegebenen Geraden ist.

Auflösung. Fig. 66. Es seien AB, BC die gegebenen Geraden, so daß AB in F nach dem Verhältnisse AF : FB = FB : BC getheilt werden soll. Schneide auf einer Geraden nach einander AB und BC ab, halbire BC in E; errichte in B auf AC das Loth BD bis zum Durchschnitte D mit dem Kreise, welcher über AC beschrieben ist; ziehe ED und mache auf der EA die EF der ED gleich, so ist FB die mittlere Proportionale zwischen AF und BC.

Beweis. Beschreibe um E mit ED den Halbkreis FDG, welcher die Verlängerung von AC in G durchschneidet. Dann ist im Kreise ADC

$$AB : BD = BD : BC.$$

Im Kreise FDG ist ebenso

$$DB : FB = BG : BD.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$AB : FB = BG : BC, \text{ also auch}$$

$$AB - FB : FB = BG - BC : BC, \text{ d. h.}$$

$$(\text{weil } BG = BC + BF \text{ ist})$$

$$AF : BF = BF : BC.$$

Es ist daher AB in F so geschnitten, daß FB die mittlere Proportionale zwischen AF und der Geraden BC ist.

47. Zu drei in einer Geraden liegenden Punkten den vierten harmonischen Punkt zu finden.

Auflösung. Fig. 67. Wenn A, B, C die drei gegebenen Punkte sind, so beschreibe ein Viereck GFHE so, daß zwei Gegenseiten GF, EH im Punkte A, die beiden andern Gegenseiten FH, GE im Punkte C sich schneiden, und eine Diagonale GH durch den Punkt B geht. Wird nun die zweite Diagonale FE gezogen, so schneidet dieselbe, verlängert, die Gerade, in welcher die Punkte A, B, C

liegen, in einem Punkte D, welches der gesuchte vierte harmonische Punkt ist. — Auf ähnliche Art wird verfahren, wenn zu C, D, A der vierte harmonische Punkt B u. s. w. gesucht werden soll.

48. Eine Figur zu construiren, welche der Summe oder Differenz zweier ähnlicher Figuren gleich und denselben ebenfalls ähnlich ist.

Auflösung. Suche an beiden Figuren zwei homologe Seiten und construire mit denselben ein rechtwinkeliges Dreieck, so daß im ersten Falle die homologen Seiten die Katheten des Dreiecks, im zweiten Fall die Seite der größern Figur Hypotenuse und die der kleinern Kathete desselben werden. Die gefundene dritte Seite ist dann die homologe Seite der gesuchten Figur, über welcher dieselbe vollendet werden kann.

---

49. Eine gegebene begrenzte Gerade AB so zu halbiren, daß die Halbirungslinie durch einen gegebenen Punkt C geht.

Auflösung. Fig. 68. Ziehe AC und durch B auf der andern Seite von AB die Linie BD gleich und parallel mit AC, ziehe CD, so halbirt diese die AB in E.

50. Zwei Gerade und ein Punkt, welcher in keiner derselben liegt, sind gegeben; durch den Punkt eine Gerade so zu legen, daß

a) der Punkt von beiden Durchschnitten der gesuchten mit den gegebenen Geraden,

b) ein Durchschnittspunkt vom andern und vom gegebenen Punkte gleich weit entfernt ist.

Auflösung. ad a) Fig. 69. Es seien die Geraden NM, NO, welche sich in N schneiden, und der Punkt P gegeben. Ziehe NP und verlängere dieselbe bis A, so daß PA = PN; ziehe durch A mit NO die AB parallel, bis sie den

Schenkel MN in B schneidet; ziehe BPC, so ist BC in P halbirt.

Die Auflösung ad b) ist der vorhergehenden ganz ähnlich (2 Fälle).

51. Eine Gerade MN und außerhalb derselben sind zwei Punkte A und B gegeben. In der Geraden MN einen Punkt C zu finden, so daß AC und BC mit der Geraden MN gleiche Winkel bilden.

Auflösung. Fig. 70. Fälle von dem einen gegebenen Punkte A auf die Gerade MN ein Loth AE und verlängere dasselbe; mache die Verlängerung ED = AE; ziehe DB, welche die Gerade MN in C schneidet, so ist C der gesuchte Punkt. Denn es ist ACE = BCN.

52. Zwei Gerade und zwei Punkte sind gegeben; durch die Punkte Linien so zu ziehen, daß an jeder Geraden gleiche Winkel gebildet werden.

Auflösung. Fig. 71. Es seien die Geraden MN, ON und die Punkte A und B gegeben. Fälle von A und B auf MN und ON die Senkrechten Aa, Bb, so daß ma = Am, bn = Bn; ziehe ab, welche MN in C und ON in D schneidet, ferner AC und BD, so werden in C und D gleiche Winkel gebildet. Es ist nemlich W. ACM = W. DCN und W. BDN = W. CDO (2 Fälle).

53. Es sind drei Gerade und zwei Punkte gegeben; durch die Punkte Linien zu ziehen, so daß an jeder Geraden gleiche Winkel gebildet werden.

Auflösung. Fig. ~~61.~~ 72 Es seien die Geraden MN, NO, OP und die Punkte A und B gegeben. — Fälle von A auf MN die Senkrechte Aa, so daß Am = ma, ferner von a auf NO die Senkrechte ac, so daß an = nc und von B auf OP das Loth Bb, so daß Bp = pb. Ziehe bc, welche NO in D und OP in E schneidet, ferner Da, welche MN in C schneidet. Zieht man nun AC und BE,

so ist Winkel ACm = DCN, CDN = EDO, DEO = BEp (6 Aufl.).

Es ist hieraus ersichtlich, wie man für mehrere Linien fortfahren kann. Die gebrochene Linie ACDEB wird z. B. von einer Billardkugel beschrieben, welche aus A gespielt die drei Bande MN, NO, OP und einen in B liegenden Ball treffen soll.

54. Zwei convergirende Gerade, welche sich auf dem Zeichnungsblatte nicht mehr durchschneiden und ein Punkt, welcher in einer der Geraden liegt, sind gegeben. Man soll in der andern einen zweiten Punkt bestimmen, welcher vom Durchschnittspunkt der Geraden dieselbe Entfernung haben würde, wie der gegebene Punkt.

Auflösung. Fig. 73. Es seien die Linien AB, CD und in AB der Punkt P gegeben. Ziehe durch P mit CD die Parallele PM und halbire den Winkel APM durch die Gerade PE, welche CD in E schneidet, so ist E der gesuchte Punkt.

55. Dieselben Linien wie vorhin seien gegeben. Man soll den Winkel, den sie bilden, halbiren.

Auflösung. Fig. 73. Verfahre wie vorher und errichte in der Mitte von EP eine Senkrechte, so halbirt dieselbe den Winkel der Geraden AB, CD. — Wie würde man verfahren müssen, wenn der Nebenwinkel des gegebenen halbirt werden soll?

56. Dieselben convergirenden Linien und ein Punkt P
a) zwischen denselben,
b) außerhalb derselben
seien gegeben. Man soll durch den Punkt eine Linie ziehen, welche verlängert durch den Durchschnittspunkt der gegebenen gehen würde.

Auflösung. Fig. 74. Ziehe durch P mit AB, CD die Linien PN, PM parallel, bis AB, CD in M, N geschnitten werden; ziehe MN und halbire diese in O; ziehe PO,

so geht diese verlängert durch den Durchschnitt von AB, CD.

Oder: Fig. 75. Ziehe durch P zwei sich schneidende Gerade NR, OQ, ferner NQ, OR, welche sich in S schneiden. Aus S ziehe beliebig SM, welche AB in T und CD in M schneidet; ziehe die Diagonalen MQ, NT, welche sich in E schneiden und verbinde P mit E, so ist PE die verlangte Gerade (vergl. I, 96).

ad b) Die Auflösung wird wie die nächst vorhergehende ausgeführt.

57. Es sind eine Gerade und außerhalb derselben zwei Punkte gegeben; durch letztere zwei Parallelen so zu ziehen, daß von der Geraden eine bestimmte Länge abgeschnitten wird.

Auflösung. Fig. 76. Es seien die Gerade MN, die Punkte A, B und die Länge m gegeben. — Ziehe durch den einen Punkt A eine Parallele AC mit MN und mache AC = m; ziehe BC bis zum Durchschnitt b mit MN und durch A mit Bb die Parallele Aa, so ist ab = m (2 Aufl.).

58. Drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, sind gegeben; durch den einen eine Gerade zu ziehen,

a) welche von den beiden andern Punkten gleich weit entfernt ist;
b) deren Entfernungen von den beiden andern Punkten ein gegebenes Verhältniß haben;
c) so daß die Summe
d) die Differenz dieser Entfernungen einer gegebenen Länge gleich ist.

Auflösung. ad a) Wenn A, B, C die gegebenen Punkte sind, so ziehe durch den Punkt A eine Parallele mit der Verbindungslinie der Punkte B und C. —

Oder: Verbinde A mit dem Halbirungspunkte der Linie BC (6 Aufl.).

ad b) Wenn die Entfernungen der Punkte B und C von der durch A gezogenen Geraden sich wie die Linien m und n

verhalten sollen, so ziehe durch B und C in beliebiger Richtung zwei Parallelen, welche den Linien m und n bezüglich gleich sind. Verbinde die Endpunkte derselben durch eine Gerade, welche von der Geraden BC in einem Punkte D geschnitten wird. Verbinde den Punkt D mit A, so ist diese Linie DA die gesuchte (6 Aufl.).

ad c) Fig. 77. Halbire BC in D und beschreibe um D mit einem Halbmesser, welcher der Hälfte der gegebenen Länge gleich ist, einen Kreis. Aus dem Punkte A ziehe an denselben eine Tangente Ad, so ist diese die verlangte Linie. Denn weil Dd durch die Mitte von BC geht, so ist, wenn Bb und Cc mit Dd parallel gezogen sind, $Bb + Cc = 2Dd$ (6 Aufl.).

ad d) Fig. 78. Beschreibe um BC als Durchmesser einen Kreis und trage die Sehne Bd, dem gegebenen Unterschiede gleich, aus dem einen Endpunkte, z. B. aus B in dem Kreise ein. Verlängere Bd und fälle aus A auf dieselbe die Senkrechte AD, so ist diese die verlangte Linie (6 Aufl.).

59. Drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, sind gegeben; durch dieselben drei Parallelen zu ziehen, von denen die mittlere von den beiden äußern gleiche Entfernung hat.

Auflösung. Fig. 79. Wenn A, B, C die gegebenen Punkte sind, so verbinde die Punkte B und C durch die Gerade BC, und verlängere letztere nach D, so daß $BD = BC$ ist. Man ziehe AD und mit ihr BE, CF parallel, so sind diese die verlangten Linien.

Oder: Ziehe aus jedem Punkte nach der Mitte der Linie, welche die andern Punkte verbindet u. s. w. (6 Aufl.).

60. Drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, sind gegeben; eine Gerade durch einen vierten Punkt zu ziehen, daß, wenn von den drei Punkten auf dieselbe Lothe gefällt werden, das eine Loth der Summe der beiden andern gleich wird.

Die Auflösung beruht auf I, 31.

61. Zwei Parallelen und zwei Punkte, welche nicht in denselben liegen, sind gegeben; man soll durch letztere zwei Parallelen ziehen, welche mit ersteren einen Rhombus bilden.

Auflösung. Es seien die Parallelen MN, OP und die Punkte A und B gegeben. Mit dem Abstande der beiden Parallelen beschreibe um den einen gegebenen Punkt, z. B. A, einen Kreis, ziehe an denselben aus B eine Tangente BE und mit ihr durch A eine Parallele AF, so erhält man den Rhombus CDEF (4 Aufl.).

62. Durch einen innerhalb oder außerhalb eines Kreises liegenden Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine Sehne von bestimmter Länge bildet.

Auflösung. Trage willkürlich eine Sehne ein, welche die gegebene Länge hat, beschreibe mit ihrem Abstande vom Mittelpunkte des Kreises einen concentrischen Kreis und ziehe aus dem gegebenen Punkte an letztern eine Tangente (2 Aufl.).

63. Eine Sehne von gegebener Länge parallel mit einer gegebenen Geraden in den Kreis einzutragen.

Die Auflösung ist der vorigen analog.

64. Am Endpunkte einer Geraden eine Senkrechte zu errichten, ohne die Gerade zu verlängern.

Auflösung. Soll in dem Endpunkte A einer Geraden AB die Linie AD senkrecht errichtet werden, so nehme außerhalb AB beliebig den Punkt C an und beschreibe um denselben mit CA einen Kreis, welcher AB noch in B schneidet. Ziehe BCD bis zum Durchschnitte D mit dem Kreise, und dann DA, so ist diese das verlangte Loth.

65. Ohne Lineal beliebig viele Punkte zu finden, welche in der Verlängerung einer gegebenen Geraden liegen.

Auflösung. Es sei AB die gegebene Gerade. Beschreibe um die in derselben beliebig angenommenen Punkte A und B Kreise, welche sich in C und D schneiden,

Um C und D beschreibe mit gleichen Halbmessern Kreise, welche sich in E schneiden, so liegt E in der Verlängerung von AB. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man noch andere Punkte.

---

66. Ein Parallelogramm oder Dreieck in ein anderes Parallelogramm oder Dreieck zu verwandeln, welches mit dem gegebenen eine Seite gleich hat und einen gegebenen Winkel enthält.

Auflösung beruht auf dem Satze, daß Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe gleich sind.

67. Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflösung. Halbire eine Seite des Dreiecks und vollende über einer Hälfte das Rechteck von einerlei Höhe mit dem Dreiecke.

68. Ein Paralleltrapez in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. Halbire eine der nicht-parallelen Seiten und ziehe durch diese Mitte eine Parallele mit der Gegenseite.

69. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln,

a) wenn eine Seite des verlangten Dreiecks gegeben ist;

b) wenn ein Eckpunkt in einem bestimmten Punkte innerhalb des gegebenen Dreiecks,

c) wenn ein Eckpunkt in einem bestimmten Punkte außerhalb des gegebenen Dreiecks liegen soll.

Auflösung. ad a) Schneide die gegebene Länge (Fig. 80) aus einer Ecke auf einer Dreiecksseite in AM ab, ziehe CM und construire ein Dreieck CNM über CM, welches dem Dreiecke CMB gleich ist und dessen Spitze in der Linie AC liegt. — Denn weil △ CMB = △ CMN, so ist auch △ AMN = △ ABC. Sollte der Endpunkt M auf die Verlängerung von AB fallen, so ziehe

ebenfalls CM und mache über CM das Dreieck CNM dem Dreiecke CBM gleich.

ad b) Es möge D (Fig. 81) die Spitze des verlangten Dreiecks werden und die Grundlinie desselben längs der Grundlinie AB des gegebenen Dreiecks ABC fallen. Ziehe AD, BD, CD; verwandle das Dreieck ACD in ein anderes, ADE, dessen Spitze E in der Linie AB liegt und verwandle ebenso das Dreieck BDC in das Dreieck BDF, so ist das Dreieck EDF dem gegebenen Dreiecke ABC gleich.

ad c) Fig. 82. Wenn die Spitze des verlangten Dreiecks in dem Punkte D außerhalb des gegebenen Dreiecks ABC liegen soll, so ziehe DB und verwandle das gegebene Dreieck ABC in ein anderes, welches dieselbe Grundlinie AB enthält und dessen Spitze E ist. Wird nun das Dreieck ABE nach der vorhergehenden Aufgabe in ein anderes, BDF, verwandelt, dessen eine Seite BD ist, so ist das Dreieck BDF dem Dreiecke ABC gleich. — Auf ähnliche Weise erhält man die Auflösung der Aufgabe:

70. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Höhe gegeben ist.

71. Ein Viereck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. Fig. 83. Es soll ein Rechteck gefunden werden, welches dem gegebenen Vierecke ABCD gleich ist. — Ziehe eine Diagonale, z. B. AC, und halbire AC in E; ziehe durch A und E auf AC die Lothe MP, NO und durch B und D mit AC die Parallelen MN, PO, so ist das Rechteck MNOP dem Vierecke ABCD gleich.

72. Ein Viereck in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Fig. 84. Ziehe eine Diagonale des gegebenen Vierecks ABCD, z. B. BD. Verlängere AB und verwandle das Dreieck DCB in das Dreieck DEB, dessen eine Winkelspitze E in AB liegt, so ist das Dreieck ADE dem Vierecke ABCD gleich.

Oder: Ziehe beide Diagonalen **AC**, **BD**, verlängere **DB** nach **G**, so daß **DG** = **BF** ist und ziehe **AG**, **CG**, so ist das Dreieck **AGC** das verlangte.

73. Ein Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Spitze in einer Ecke des Fünfecks und dessen Grundlinie in die Richtung einer Seite desselben fällt.

Auflösung. Fig. 85. Man ziehe **BD** und verlängere **ED**. Verwandle das Dreieck **BCD** in das Dreieck **BDF**, dessen Spitze **F** in **ED** liegt, so erhält man statt des Fünfeckes **ABCDE** das Viereck **ABFE**. Wird nun dieses Viereck in ein Dreieck **ABM** verwandelt, indem △ **BEM** = △ **BEF** gemacht wird, so ist auch das Dreieck **ABM** dem Fünfecke **ABCDE** gleich.

Anmerkung. Man sieht hieraus, daß die Verwandlung eines **n** Ecks in ein Dreieck auf der Aufgabe beruht, dasselbe in ein (**n** — 1) Eck zu verwandeln, welches mit Hülfe der Diagonalen nach den beiden vorhergehenden Aufgaben leicht geschehen kann.

74. Ein Viereck mit einem einspringenden Winkel in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Fig. 86. Es sei im Vierecke **ABCD** der Winkel **ADC** einwärts springend. Wenn man **AC** zieht, so muß offenbar das Dreieck **ADC** vom Dreiecke **ABC** wieder weggenommen werden. Man verwandle daher das Dreieck **ADC** in das Dreieck **AEC**, so ist auch das Dreieck **ECB** dem Vierecke **ABCD** gleich.

Anmerkung. Hieraus erhellet, wie überhaupt alle einwärts springenden Winkel eines Vielecks weggeschafft werden können. Es können daher überhaupt alle geradlinigten Figuren in Dreiecke und Parallelogramme verwandelt werden.

75. Zwei Parallelogramme in ein einziges zu verwandeln.

Auflösung. Verwandle jedes Parallelogramm in ein Dreieck, und das eine der letztern in ein anderes, welches gleiche

Höhe mit dem erstern hat, so läßt sich aus beiden ein einziges Dreieck bilden und dieses in ein Parallelogramm verwandeln.

Oder: Fig. 87. Es seien die Parallelogramme **ABDE** und **CBFG** gegeben. Construire auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels **ABC** zwei Parallelogramme, welche den gegebenen gleich sind. Verlängere die äußern Seiten **ED** und **FG** bis zu ihrem Durchschnitte in **H**; ziehe die Geraden **AC** und **HBN**, durch **A** und **C** mit **HN** die **AJ** und **CK** parallel, und dann **JK**, so ist **AJKC** ein Parallelogramm und der Summe der beiden gegebenen Parallelogramme gleich.

Beweis. Weil **AJ** und **CK** mit **BH** parallel, so sind **ABHJ** und **CBHK** Parallelogramme, weshalb auch **AJ** mit **CK** gleich ist. Daher ist auch **AJKC** ein Parallelogramm. Weil ferner Pllg. **AEDB** = Pllg. **AJHM** = Pllg. **AJMN** und Pllg. **CBFG** = Pllg. **CBHK** = Pllg. **CKMN**, so ist auch Pllg. **AJKC** = Pllg. **AEDB** + Pllg. **CBFG**.

76. Über einer gegebenen Geraden ein Parallelogramm zu beschreiben, welches einem gegebenen Parallelogramme oder Dreiecke gleich ist.

Auflösung. Man ziehe eine Diagonale des gegebenen Parallelogramms, und verwandle ein hierdurch entstandenes Dreieck in ein anderes, welches die gegebene Seite hat; hieraus erhält man wieder leicht das verlangte Parallelogramm.

Oder: Fig. 88. Verlängere eine Seite **AD** des gegebenen Parallelogramms **ABCD** und mache die Verlängerung **DE** der gegebenen Länge gleich; verlängere **BC** und vollende das Parallelogramm **DCFE**, ziehe die Diagonale **FD** desselben und verlängere dieselbe bis zum Durchschnitte **G** mit **BA**; vollende das Parallelogramm **AEKG** und verlängere **CD** nach **H**, so ist **DEKH** das

verlangte Parallelogramm. — Letzteres wird noch einfacher erhalten, wenn **CE** und mit dieser parallel **AH** bis zum Durchschnitte mit **CD** gezogen wird.

77. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Fig. 89. Suche zu zwei Seiten **AB**, **BC** des gegebenen Rechtecks **ABCD** die mittlere Proportionale, so ist dieselbe die Seite des verlangten Quadrats. Mache also z. B. die Verlängerung **BE** der Seite **AB** gleich der Seite **BC**; beschreibe über **AE** den Halbkreis **AGE** und verlängere **BC** bis zum Durchschnitte **G** mit dem Kreise, so kann über **BG** das Quadrat vollendet werden.

78. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel desselben constant bleibt und die Gegenseite von gegebener Länge ist.

Fig. 90. Man soll zwischen die Seiten **AC** und **AB** des Dreiecks **ABC** eine Linie **MN** von gegebener Länge so legen, daß das hierdurch entstehende Dreieck dem gegebenen Dreiecke **ABC** gleich ist.

Auflösung. Fig. 90[a] und [b]. Trage die gegebene Länge in **AD** auf eine Seite **AB** des gegebenen Dreiecks **ABC** auf, und verwandle letzteres in das Dreieck **AED**. Beschreibe nun (Fig. 90[b]) über **AD** einen Kreisabschnitt **AMD**, welcher den Winkel **A** faßt, und ziehe durch **E** mit **AD** die Parallele **EM**, so ist **AMD** das verlangte Dreieck. Schneidet man daher **AM** auf **AB** und **DM** (**AN**) auf **AC** ab, so ist das Dreieck **AMN** dem Dreiecke **ABC** gleich, während die Seite **MN** der gegebenen Linie gleich ist. — Es ist leicht zu sehen, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich wird.

79. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel sich nicht ändert, während die Gegenseite eine gegebene Richtung hat.

Auflösung. Fig. 91. Zieht man durch eine der beiden übrigen Winkelspitzen des gegebenen Dreiecks **ABC**, z. B.

durch **B** (wenn der Winkel **A** constant bleiben soll) eine Gerade **BD**, welche die gegebene Richtung hat und sucht zu **AD** und **AC** die mittlere Proportionale **AE**, welche man auf **AC** aus **A** in **AF** abschneidet und zieht durch **F** mit **BD** die Parallele **FH**, welche die verlängerte **AB** in **H** schneidet, so ist das Dreieck **AHF** dem gegebenen Dreiecke **ABC** gleich und die Seite **FH** hat die verlangte Richtung.

Beweis. Weil der Winkel **A** den Dreiecken **ABC** und **AHF** gemeinschaftlich ist, so ist auch △ **AHF** : △ **ABC** = **AH . AF : AB . AC.** Weil aber auch **AH : AB** = **AF : AD** = **AC : AF**, so folgt, daß △ **AHF** = △ **ABC** ist.

80. Ein Dreieck durch eine Parallele mit einer Seite in ein Trapez zu verwandeln, wenn die zwei Winkel an dieser Seite von gegebener Größe sein sollen.

Auflösung. Fig. 92. Verwandle das gegebene Dreieck in das gleich große Dreieck **ABC**, in welchem der Winkel **CAB** dem einen der gegebenen Winkel gleich ist, und lege in **B** den zweiten gegebenen Winkel **ABD** an. Ziehe **CE** und **BE** bezüglich mit **AB** und **AC** parallel und suche zu **CD** und **CE** (oder **AB**) wie in der Figur angegeben, die mittlere Proportionale **CF**, welche man auf **CE** in **CG** abschneidet. Zieht man **GM** mit **CA** parallel bis zum Durchschnitte mit **BD** und durch **M** die **MN** mit **AB** parallel, so ist das Trapez **ABMN** das verlangte.

Beweis. Offenbar müssen, wenn **ABMN** und **ABC** gleich sein sollen, auch die Dreiecke **BMP** und **CPN**, folglich, wenn man sich **AC** und **BD** bis zu ihrem Durchschnitte **O** verlängert vorstellt, die Dreiecke **OBC** und **OMN** gleich sein. Es ist aber △ **OBC** : △ **OMN** = **OB . OC : OM . ON** = **AB . CD : MN . MN**; folglich, weil nach der Construktion **MN . MN = CG . CG = AB . CD**

ist, auch $\triangle$ OBC = $\triangle$ OMN, woraus die Richtigkeit der Construktion erhellet.

81. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, wenn eine Seite desselben durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Auflösung. Fig. 93. Es liege der gegebene Punkt D zwischen den Schenkeln eines Dreieckswinkels. — Das gegebene Dreieck läßt sich immer in ein anderes, ABC, verwandeln, dessen Spitze C im Durchschnittspunkt der Parallelen, welche durch D mit AB gezogen ist, und der Dreiecksseite AO liegt. Dieses Dreieck ABC läßt sich in ein Parallelogramm ACEF verwandeln, von welchem die der Grundlinie gegenüberliegende Seite durch den Punkt D geht. In F (der Mitte von AB) errichte die Senkrechte FM gleich CD; durch M ziehe MN gleich DE; ferner ziehe NDO, so ist das Dreieck AON das verlangte.

Beweis. Zu beweisen ist, daß die Dreiecke CDO und FNG zusammen dem Dreiecke DEG gleich sind. Es ist aber, weil dieselben ähnlich sind,

$$\triangle OCD : \triangle GFN = CD^2 : FN^2$$

$$\triangle OCD + \triangle GFN : \triangle GFN = CD^2 + FN^2 : FN^2$$

$$= MN^2 : FN^2$$

$$= DE^2 : FN^2.$$

Weil aber $\triangle GED : \triangle GFN = DE^2 : FN^2$, so ist offenbar $\triangle OCD + \triangle GFN = \triangle GED$, woraus die Richtigkeit der Construktion hervorgeht.

Wenn der gegebene Punkt D außerhalb des Dreiecks liegt, so verwandle das Dreieck ebenfalls in ein Parallelogramm, dessen eine Seite durch den Punkt D geht (Fig. 94). Errichte in F auf AN die Senkrechte FM der DC gleich und mache MN = DE, ziehe DN, so ist AGN das verlangte Dreieck. — Der Beweis wird wie vorhin geführt.

82. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Auflösung. Fig. 95. Es sei das Dreieck **ABC** gegeben. Beschreibe über **AB** das gleichseitige Dreieck **AOB**; ziehe durch **C** mit **AB** die Parallele **CD** bis zum Durchschnitte mit **AO** und dann **DB**, so ist das Dreieck **ADB** dem Dreiecke **ACB** gleich. Suche nun zu **AD** und **AB** die mittlere Proportionale **AN**, so ist diese die Seite des gleichseitigen Dreiecks, über welcher dasselbe beschrieben werden kann.

Beweis. Die Dreiecke **DAB** und **MAN** haben den Winkel **DAN** gemeinschaftlich, folglich ist $\triangle$ **DAB** : $\triangle$ **MAN** $=$ **AD** . **AB** : **AN** . **AN**; weil aber **AN** . **AN** $=$ **AD** . **AB** (nach der Construktion) ist, so ist auch $\triangle$ **DAB** $= \triangle$ **MAN**.

83. Ein Trapez mit zwei parallelen Seiten über einer dieser parallelen Seiten (ohne Verwandlung in ein Dreieck) in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. Fig. 96. Es sei **ABCD** das gegebene Trapez, über dessen kleinerer Seite **AB** das Parallelogramm beschrieben werden soll. Ziehe durch **A** mit **BC** die **AE** parallel und verlängere letztere Linie. Ziehe die Diagonale **AC** des Parallelogramms **ABCE**, halbire **DE** in **M**; ziehe durch **M** mit **AC** die **MF** parallel bis zum Durchschnitt **F** mit der verlängerten **AE** und vollende das Parallelogramm **ABGF**, so ist dieses das verlangte.

Beweis. Ziehe **FC**, so ist leicht zu zeigen, daß die Dreiecke **AME** und **CFE** gleich sind. Daher ist auch das Dreieck **ADE** dem Parallelogramm **CEFG** gleich, woraus die Gleichheit von **ABCD** und **ABGF** folgt.

Soll das Parallelogramm über der größern Seite beschrieben werden, so ist die Auflösung von vorstehender wenig verschieden.

84. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Auflösung. Fig. 97. Das Dreieck ABC soll in ein anderes verwandelt werden, welches dem gegebenen Dreiecke MNO ähnlich ist. Beschreibe über einer Seite AB des Dreiecks ABC ein Dreieck ABD, welches dem Dreiecke MNO ähnlich ist. Ziehe durch C mit AB die Parallele CH bis zum Durchschnitte mit AD, dann HB, so sind die Dreiecke ABC und ABH gleich. Suche, wie in der Figur angegeben, zu AH, AD die mittlere Proportionale AF, welche man auf AD in AG abschneidet und ziehe durch G mit BD die Parallele GE, so ist das Dreieck AEG das verlangte.

Beweis. Es ist $\triangle\ ABD : \triangle\ ABH = AD : AH$

$\triangle\ AGE : \triangle\ ABD = AG^2 : AD^2$,

folglich $\triangle\ AGE : \triangle\ ABH = AG^2 : AD \,.\, AH$,

weil aber nach der Construktion $AH : AG = AG : AD$, so folgt, daß das Dreieck AGE dem Dreiecke ABH, also auch dem Dreiecke ABC gleich ist. Daß das Dreieck AGE dem Dreiecke MON ähnlich ist, ist für sich klar.

85. Eine Figur in eine andere zu verwandeln, welche zugleich einer gegebenen Figur ähnlich ist.

Auflösung. Es seien die gegebenen Figuren A und B, eine Seite der ersteren sei a und letztere B sei zu verwandeln. Verwandle beide Figuren in Quadrate (was immer geschehen kann, da nach dem Obigen jede Figur in ein Dreieck oder Parallelogramm, also auch in ein Rechteck, und letzteres wieder in ein Quadrat verwandelt werden kann). Die Quadrate seien mit A, und B, und ihre Seiten mit a,, b, bezeichnet. Suche zu a,, b, und a die vierte Proportionale x, so kann über derselben eine Figur C beschrieben werden, welche der Figur A ähnlich und zugleich der Figur B gleich ist.

Beweis. Weil C und A ähnlich sind, so ist $A : C = a^2 : x^2$,

also auch $A_, : C = a^2 : x^2$. Es ist aber auch nach der Construktion $A_, : B_, = a^2 : x^2$ oder $A_, : B = a^2 : x^2$, woraus folgt, daß die Figuren B und C gleich sind.

86. Eine Methode, jede geradlinige Figur auf einfache Weise sogleich in ein Rechteck zu verwandeln, gibt Mayer in seiner „praktischen Geometrie" an (Fig. 98).

Es sei ABCDEF die gegebene Figur, welche in ein Rechteck über der Diagonale AF verwandelt werden soll. — Fälle aus den Ecken B, C, D, E Senkrechte auf AF, wodurch das Vieleck in rechtwinkelige Trapeze zerlegt wird; halbire die Seiten AB, BC, CD u. s. w. in m, $m_,$, m_2 u. s. f.; errichte in F auf A die Senkrechte FY und trage durch Parallelen in FY die Punkte n, $n_,$, n_2 u. s. w. in gleicher Höhe über AF mit m, $m_,$, m_2 u. s. f. auf. Ziehe An, welche Bb in β schneidet, ferner $An_,$ und mit derselben durch β die $\beta\gamma$ parallel mit $An_,$ bis zum Durchschnitt γ mit Cc; ziehe An_2 und mit ihr $\gamma\delta$ parallel, ferner An_3 und mit dieser $\delta\varepsilon$ parallel und endlich An_4 und mit ihr εM parallel. Vollendet man über den Seiten AF und FM das Rechteck AFMN, so ist dasselbe dem obern Theile der ganzen Figur AE gleich.

Beweis. Im Dreiecke AFn ist $AF : Fn = Ab : b\beta$, d. h. $AF \cdot b\beta = Ab \cdot Fn$. Denkt man sich also durch β mit AF eine Parallele gezogen, so entsteht ein Rechteck, welches dem Dreiecke ABb gleich ist. In den Dreiecken $AFn_,$ und $bc\gamma_,$ ist $AF : Fn_, = bc : c\gamma_,$, folglich $AF \cdot c\gamma_, = Fn_, \cdot bc$, woraus folgt, daß wenn eine Parallele mit AF durch γ gezogen wird, ein Rechteck entsteht, welches der Figur ABCc gleich ist. Es ist klar, wie man für die übrigen Trapeze weiter gehen kann. — Auf dieselbe Weise wird der auf der andern Seite der Linie AF liegende Theil in ein Rechteck verwandelt.

Diese Methode ist überall anwendbar, wenn auch die

Figur einspringende Winkel hat. Sie dient überhaupt dazu, eine Figur in ein Rechteck von gegebener Seite zu verwandeln.

---

87. Ein Dreieck in n (z. B. drei) gleiche Theile zu theilen, wenn die Theilungslinien in einem Punkte einer Seite zusammen laufen sollen.

Auflösung. Fig. 99. Es liege der gegebene Punkt D in der Seite AC des Dreiecks ABC. Theile AB in drei gleiche Theile in m und n; ziehe Cm und verwandle das Dreieck ACm, welches der dritte Theil von ABC ist, in das Dreieck ADE. Ebenso verwandle das Dreieck ACn in das Dreieck ADp, welches leicht dadurch geschehen kann, daß man die Verlängerung Ep = AE macht. Da aber der Punkt p außerhalb des Dreiecks liegt, so ziehe DB und verwandle das Dreieck DBp in das Dreieck DBo, so ist DEBo ebenfalls der dritte Theil des Dreiecks ABC. Statt daß man das Eck p nach o verlegt, könnte man auch die Seite BC in drei Theile theilen und das Dreieck CAq in das Dreieck CDo verwandeln.

Auf dieselbe Weise kann das Dreieck auch aus dem Punkte D im Verhältnisse von m zu n getheilt werden.

88. Ein Parallelogramm aus einer Winkelspitze in fünf gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Fig. 100. Wenn die Theilungslinien durch die Winkelspitze B des Parallelogramms ABCD gehen sollen, so theile die Seiten AD und CD jede in fünf gleiche Theile und ziehe von B nach dem zweiten und vierten Theilpunkt, d. h. nach m, n, m′, n′ Gerade, so erhält man die verlangten fünf gleichen Theile.

89. Ein Parallelogramm aus einer Seite in fünf gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Fig. 101. Soll das Parallelogramm ABCD

aus dem Punkte E getheilt werden, so theile CD in fünf gleiche Theile, und ziehe, wenn m der zweite Theilpunkt ist, die Linie Bm; verwandle das Dreieck BCm in das Dreieck ECn, so ist dieses der fünfte Theil des Parallelogramms. Kann man nun die Länge Cn auf BD noch ein- oder mehrmale nach einander abschneiden, so erhält man leicht die nächsten Theilungslinien. In der Figur fällt schon der nächste Endpunkt der Linie no, welche der Linie Cn gleich gemacht ist, auf die Verlängerung der Seite CD. Ziehe daher ED und verwandle das Dreieck EDo in das Dreieck EDp, so ist EnDp wieder der fünfte Theil. Theilt man ebenso BA in fünf gleiche Theile, zieht aus C nach dem zweiten und vierten Theilpunkt m′, o′ die Linien Cm′, Co′, so kann man wie vorher die Dreiecke CBm′ und CBo′, wie vorhin, in das Dreieck EBn′ und das Viereck EBAq verwandeln; wodurch man die Theilungslinien En, Ep, Eq, En′ erhält.

90. Eine gegebene geradlinige Figur aus einer Ecke in fünf gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Fig. 102. Es sei das Sechseck ABCDEF aus dem Punkte B in fünf gleiche Theile zu theilen. Verwandle das Sechseck in das Dreieck ABG, theile die Seite AG desselben in fünf gleiche Theile, in m, n, o, p; ziehe Bm, Bn, Bo, Bp, so ist jedes Dreieck der fünfte Theil der gegebenen Figur. Da aber der Punkt n außerhalb der Figur liegt, so ziehe BF und verwandle das Dreieck BFn in das Dreieck BFn′, indem man nn′ mit BF parallel bis zum Durchschnitte mit der Seite FE zieht. Man erhält hierdurch das Viereck BmFn′, welches dem Dreiecke Bmn gleich und folglich der fünfte Theil der Figur ist. Auf dieselbe Weise verwandle das Dreieck BFo in das Dreieck BFo′, so ist Bo′ eine Theilungslinie. Das Dreieck BFp wird man zuerst in das Dreieck BFp′

verwandeln, wo p' auf der Verlängerung von FE liegt. Zieht man dann BE und verwandelt das Dreieck BEp' in das Dreieck BEp'', wo p'' in der Seite von ED liegt, so ist Bp'' die nächste Theilungslinie. Die Figur ABCDEF ist daher durch die Linien Bm, Bn', Bo', Bp'' in fünf gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. Das gegebene Verfahren läßt sich leicht auf Vielecke von beliebiger Seitenzahl ausdehnen.

91. Eine gegebene geradlinige Figur aus einer Seite in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Fig. 103. Es sei das Fünfeck ABCDE durch Linien, welche aus dem Punkte M gezogen sind, in drei gleiche Theile zu theilen. Verwandle die Figur in ein Dreieck ABF, theile AF in drei gleiche Theile in a und b; ziehe Ba, Bb, verwandle das Dreieck ABa in das Dreieck AMG, ziehe BM, verwandle das Dreieck MBG in das Dreieck BMH, dessen Spitze H in der Verlängerung der Linie BC liegt; ziehe CM und verwandle das Dreieck MCH in das Dreieck MCJ, so ist MABCJ der dritte Theil der gegebenen Figur. Verfährt man ebenso mit dem Dreiecke ABb, so erhält man MK als zweite Theilungslinie.

92. Eine Figur in gleiche Theile zu theilen, wenn die Theilungslinien durch einen innerhalb der Figur liegenden Punkt gehen.

Auflösung. Fig. 104. Es sei das Fünfeck ABCDE aus dem Punkte O zu theilen. Verwandle das Fünfeck in ein Dreieck MON, dessen Spitze in O und dessen Grundlinie MN in der Richtung von AE liegt. Theile MN in die gegebene Anzahl gleicher Theile (in der Figur in drei Theile durch die Punkte G und H), ziehe OG, OA, verwandle das Dreieck OAM in das Dreieck OAm, dessen Spitze m in der Verlängerung von AB liegt, ziehe OB und verwandle das Dreieck OBm in das Dreieck OBn,

so ist OGABn der dritte Theil der Figur. Ziehe ebenso OH, OE und verwandle das Dreieck OEH in das Dreieck OEh, so ist auch OGEh und ebenso OhDCn der dritte Theil der Figur.

93. Ein Dreieck durch eine Parallele mit einer seiner Seiten im Verhältnisse von m zu n zu theilen.

Auflösung. Fig. 105. Es sei das Dreieck ABC durch eine Parallele mit AB in dem gegebenen Verhältnisse zu theilen. — Theile eine andere Seite, z. B. CB in D so, daß CD : CB = m : n und suche zu CD, CB die mittlere Proportionale CE oder CF, welche man aus C auf BC abschneidet. Durch F ziehe mit AB die FG parallel, so verhält sich das Dreieck GFC zum Dreiecke ABC wie m zu n.

Beweis. Weil die Dreiecke ABC, GFC einander ähnlich sind, so ist

$$\triangle\ GFC : \triangle\ ABC = CF^2 : CB^2.$$

Weil aber CF : CB = CD : CF, d. h. $CF^2 = CD \cdot CB$ und CD : CB = m : n, so ist auch

$$\triangle\ GFC : \triangle\ ABC = m : n.$$

94. Ein Viereck durch eine Parallele mit einer Seite im Verhältnisse von m zu n zu theilen.

Auflösung. Fig. 106. Verwandle das Viereck ABCD, welches durch eine Parallele mit BC getheilt werden soll, in das Dreieck EBC; verlängere BA, CD bis zum Durchschnitte in F, theile EB in M so, daß EM : EB = m : n; suche zu FM und FB die mittlere Proportionale FL oder FG und ziehe durch G mit BC die Parallele GH, so theilt diese Linie das Viereck ABCD im gegebenen Verhältnisse.

Beweis. Man ziehe CM. Nach der Construktion ist △ FGH = △ FMC und △ FDA = △ FCE, folglich auch ADHG = △ ECM. Es ist aber △ ECM : △ ECB = m : n, also auch ADHG : ADCB = m : n.

95. Ein Dreieck durch Gerade in gleiche Theile zu theilen, welche mit einer gegebenen Linie parallel sind.

Auflösung. Fig. 107. Es sei das Dreieck ABC in drei gleiche Theile zu theilen. Ziehe durch eine Spitze B eine Gerade BF bis zum Durchschnitte F mit AC parallel mit der gegebenen Linie; theile die Seite AC in drei gleiche Theile in m und n, suche zu Am und AF, dann zu Cn und CF die mittleren Proportionalen AE oder AL und CG oder CH, ziehe durch L und H mit FB die Parallelen LJ, HK, so ist durch dieselben das Dreieck ABC in drei gleiche Theile getheilt.

96. Auf einer Seite eines Vielecks ist ein Punkt gegeben; durch denselben eine Gerade zu ziehen, so daß das Vieleck in demselben Verhältnisse getheilt wird, in welchem der Punkt die zugehörige Seite theilt (Fig. 108).

Auflösung. Es sei ABCDE das gegebene Fünfeck, welches aus dem in der Seite BC liegenden Punkte P so getheilt werden soll, daß sich die Theile des Fünfecks verhalten wie die Längen BP und CP. — Ziehe durch den gegenüberliegenden Eckpunkt E eine Parallele mit BC und verwandle das Fünfeck in das Trapez MNCB; verlängere NC und MB bis zu ihrem Durchschnitte in S und ziehe SP bis zum Durchschnitte G mit MN. Ziehe PE und verwandle das Dreieck PEG in das Dreieck PEL, so ist PL die verlangte Linie.

Beweis. Durch PE wird das Trapez MNCB so geschnitten, daß sich die Theile wie BP und CP verhalten. Da aber $\triangle$ EGP $=$ $\triangle$ ELP ist, so erhellet die Richtigkeit der Construktion.

97. Ein Dreieck von einem außerhalb desselben liegenden Punkte aus in gleiche Theile zu theilen.

Die Auflösung läßt sich auf III, 81. zurückführen.

98. Wenn zwei gleiche Dreiecke gegeben sind, jedes derselben so zu theilen, daß aus den Theilen des einen das andere Dreieck gebildet werden könne.

Auflösung. Haben die beiden Dreiecke gleiche Grundlinie, also auch gleiche Höhen, so ist die Auflösung nach I, 26 leicht. Sind aber die Seiten ungleich, wie z. B. in den Dreiecken ABC und ADE (Fig. 109), so lege man auf der andern Seite der Linie AC ein Dreieck ADC an, welches dem Dreiecke ABC gleich ist und dessen eine Seite AD einer Seite AD des andern Dreiecks gleich ist, was mit gehöriger Berücksichtigung der Seiten immer geschehen kann. An die Seite AD dieses Dreiecks lege man das zweite gegebene Dreieck ADE mit der Seite AD an, so sind offenbar die Dreiecke ABC, ACD und ADE einander gleich. Zieht man nun BD, halbirt die Linien AB, BC, CD, DA in E, F, G, H und verbindet diese Punkte mit O, so wird jedes der Dreiecke ABC und ACD in Stücke zerlegt, aus denen das andere gebildet werden kann. Verfährt man nun mit den Dreiecken ACD und ADE ebenso, so wird auch das Dreieck ACD in Stücke zerlegt, aus welchen das Dreieck AED gebildet werden kann. Man braucht nun blos von den einzelnen Theilen, in welche die Dreiecke ABC und ADE zerlegt wurden, die Theile, in welche das Dreieck ACD durch die doppelte Theilung zerlegt worden, abzuschneiden, wobei man blos die Congruenz der Theile der Dreiecke ADE und ABC mit den zugehörigen Theilen des Dreiecks ACD zu beachten hat. In der Figur sind die gleichen Theile mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

99. a) Ein Dreieck zu construiren, welches der Summe von mehreren Dreiecken gleich ist.

b) Von einem Vierecke ein Stück abzuschneiden, welches einer gegebenen Figur gleich ist.

c) Von einem Rechtecke ein Rechteck auszuschneiden, welches

der Hälfte des gegebenen gleich ist, so daß der Rest an den vier Seiten des gegebenen von gleicher Breite ist.

d) Ein Paralleltrapez im Verhältnisse von m zu n zu theilen durch Parallelen mit den parallelen Seiten.

e) Auf zwei der Größe und Lage nach gegebenen Linien Dreiecke zu beschreiben, welche einander gleich sind und deren gemeinschaftliche Spitze in einer beliebigen Linie liegt. (Verbindet man irgend einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms mit den Gegenecken, so werden immer gleiche Dreiecke gebildet.)

f) Wenn ein Quadrat der Summe zweier Quadrate gleich ist, ersteres so in Stücke zu theilen, daß aus denselben die beiden andern Quadrate zusammengesetzt werden können.

g) Zwei gleiche Parallelogramme (mit ungleichen Seiten und Winkeln) so in Stücke zu zerlegen, daß immer aus den Theilen des einen das andere zusammengesetzt werden kann.

---

100. Zwei sich schneidende Kreise sind gegeben. Durch den einen Durchschnittspunkt eine Gerade zwischen beide Kreise zu ziehen, welche in demselben halbirt wird.

Auflösung. Fig. 110. Ziehe vom Mittelpunkte M des einen Kreises einen Radius MA nach dem einen Durchschnittspunkt der Kreise, verlängere MA und mache die Verlängerung AB = AM; durchschneide aus B mit BA den zweiten Kreis in C und ziehe CA, welche verlängert den ersten Kreis in D schneidet, so ist CD in A halbirt.

Oder: Ziehe die Centrale MN, halbire dieselbe in O, ziehe OA und errichte in A auf OA die Senkrechte CAD, so ist diese in A halbirt.

101. Zwei sich schneidende Kreise sind gegeben, durch den einen Durchschnitt eine Gerade von gegebener Größe zwischen beide Kreise zu legen.

Auflösung. Fig. 111. Über der gegebenen Geraden MN construire ein Dreieck, so daß die an derselben liegenden Winkel OMN

und ONM bezüglich den Winkeln der Kreisabschnitte ADB und ACB gleich werden. Trägt man nun die eine Seite OM aus B in den Kreis BFDA als Sehne ein und zieht DA bis zum Durchschnitte C mit dem zweiten Kreise und verbindet C mit B, so ist das Dreieck BDC mit dem Dreiecke OMN congruent und folglich DC = MN. — Ist die gegebene Linie mn kleiner, als eine durch A gehende Tangente, so erhält man ganz auf dieselbe Weise die Linie FE, deren Verlängerung durch A geht.

102. In einer beliebigen Linie den Punkt zu suchen, von welchem man an zwei Kreise gleiche Tangenten ziehen kann.

Auflösung. Fig. 112. Es seien M und N die Mittelpunkte der Kreise, so ziehe die Centrale MN und beschreibe mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, welcher beide Kreise in A, B, dann C, D schneidet. Ziehe die Sehnen CD, AB bis zu ihrem Durchschnitte E. Von E fälle auf die Centrale MN eine Senkrechte, welche die Curve GF in G schneidet. Aus G können nun an beide Kreise gleiche Tangenten gezogen werden.

103. Ein Kreis und eine Gerade ist gegeben; von einem Punkte der Geraden an den Kreis zwei Tangenten zu ziehen, deren eine den Winkel halbirt, welchen die andere mit der Geraden bildet.

Auflösung. Fig. 113. Beschreibe mit dem Radius des gegebenen Kreises M einen zweiten Kreis N, welcher die Gerade und den Kreis berührt. Durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt C der beiden Kreise ziehe die Tangente CD, welche AB in D schneidet. Zieht man aus D an den Kreis M noch die Tangente DE, so halbirt CD den Winkel EDB.

104. Durch einen Punkt A in einem Kreise M eine Gerade zu legen, so daß die Differenz der Abschnitte einer gegebenen Geraden gleich ist.

Auflösung. Fig. 114. Beschreibe um den Mittelpunkt M mit dem Halbmesser MA einen Kreis; trage die gegebene

Differenz AB aus A als Sehne in diesen Kreis und verlängere sie nach C und D, so ist

$$AC - BC = AC - AD = AB.$$

105. An einen Kreis M sind zwei Tangenten gezogen; eine dritte Tangente an den Kreis so zu ziehen, daß das zwischen den gegebenen Tangenten liegende Stück derselben von gegebener Länge ist.

Auflösung. Fig. 115. Bilde über der gegebenen Länge NO ein Dreieck, welches zur Höhe auf NO den Radius des gegebenen Kreises und zum Gegenwinkel von NO den Winkel NMO $= 90 + \frac{1}{2}A$ enthält, wenn A der Winkel ist, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden. Durchschneidet man eine der Tangenten, z. B. AN, mit einer gefundenen Seite des Dreiecks aus M in N und zieht aus N eine neue Tangente NO an den Kreis, so ist diese die gesuchte. — Läßt sich aus den genannten drei Stücken kein Dreieck bilden, so nehme man statt des Winkels $90 + \frac{1}{2}A$ einen Winkel $90 - \frac{1}{2}A$. Dann wird man nach demselben Verfahren die Tangente **no** erhalten. (Vergl. I, 54.)

106. Drei Gerade AB, AC, AD durchschneiden sich in einem Punkte A, dieselben mit einer vierten so zu durchschneiden, daß die Abschnitte von gegebener Länge sind.

Auflösung. Fig. 116. Lege die gegebenen Längen MN, NO in einerlei Richtung an einander und beschreibe über MN einen Kreisabschnitt, welcher den Winkel α der Geraden AB, AC und über NO einen Abschnitt, welcher den Winkel β der Linien AC und AD faßt. Wenn sich die beiden Kreise in P schneiden, so sind dadurch die Geraden PM, PN, PO bestimmt. Macht man daher z. B. $AE = PM$, $AG = PN$, zieht EG und verlängert letztere Linie bis zum Durchschnitte mit AD, so ist $GF = NO$, $EG = MN$.

107. Vier Punkte A, B, C, D sind gegeben; durch den einen derselben, D, eine Gerade zu ziehen, so daß die Summe der Projektionen der Linien AB, BC von gegebener Länge ist.

Auflösung. Fig. 117. Beschreibe über AB und CB als Durchmesser Kreise, lege durch B in beide Kreise die gegebene Gerade MN (101) und ziehe durch D mit MN die Parallele DE, so ist mn die Summe der Projektionen von AB und BC.

108. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher von zwei Geraden Stücke von gegebener Länge abschneidet.

Auflösung. Fig. 118. Schneide auf den beiden Geraden die gegebenen Längen AB, CD ab und bestimme die Mittelpunkte E und F der Kreise, welche durch die Punkte A,B und C,D gehen und mit dem gegebenen Halbmesser beschrieben sind; durch E und F ziehe mit AB, CD die Parallelen EO, FO, welche sich in O schneiden, so ist O der gesuchte Mittelpunkt.

109. Ein Quadrat zu beschreiben, dessen Seiten einzeln durch vier gegebene Punkte gehen, wenn von letztern keine drei in einer Geraden liegen.

Auflösung. Fig. 119. Es seien A, B, C, D die vier gegebenen Punkte. Man ziehe die Linien AB und CD; beschreibe über AB, CD als Durchmesser Kreise, halbire in jedem einen Halbkreis, z. B. in F und E, ziehe EF, welche beide Kreise nochmals in N und P schneidet; ziehe AN, BN, DP, CP, so bilden diese vier Linien das Quadrat MNOP.

Beweis. Weil Bogen DE = Bogen EC, so ist Winkel DPE = W. EPC = 45°. Ebenso ist W. ANF = W. BNF = 45°, woraus hervorgeht, daß MNOP ein Quadrat ist. Vertauscht man den Halbirungspunkt E des Bogens DEC mit dem Halbirungspunkt G des Bogens DGC und verbindet F und G, so erhält man das Quadrat

mnop. Die Punkte C und D liegen dann auf den Verlängerungen der Seiten nm und mp. Ebenso kann man statt des Punktes F den Halbirungspunkt des Bogens ANB wählen, und denselben mit E oder G verbinden. Man findet sechs verschiedene Quadrate.

110. Ein Rechteck zu construiren, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen, von denen keine drei in einer Geraden liegen, wenn eine Seite desselben eine gegebene Länge haben soll.

Auflösung. Fig. 120. Verbinde zwei Punkte, z. B. A und B. Beschreibe über AB einen Kreis und trage in denselben die gegebene Länge BE als Sehne ein. Ziehe AE und verlängere dieselbe, ziehe durch die beiden andern Punkte C und D mit BE die Parallelen ON, PM, und durch B die PB mit EM parallel, so erhält man das Rechteck MNOP. (In welchem Falle wird die Auflösung unmöglich?)

111. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist, so daß eine Seite des einbeschriebenen mit einer Seite des umbeschriebenen parallel ist.

Auflösung. Fig. 121. Wenn ABC das gegebene Dreieck ist, so beschreibe über einer Seite, z. B. AC, ein Dreieck ADC, welches dem gegebenen andern Dreiecke ähnlich ist. Ziehe AD, welche AC in d schneidet, und durch d mit AD und DC die Parallelen da, dc; ziehe noch ac, so ist acd das verlangte Dreieck.

112. Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken bezüglich in einem gegebenen Punkte, einer gegebenen Geraden und einer ganz beliebigen Curve liegen sollen, und welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Auflösung. Fig. 122. Es sei P der gegebene Punkt, MN die Gerade und GBH die Curve. Ziehe durch P die Gerade PC so, daß der Winkel PCM dem einen Winkel c des gegebenen Dreiecks abc gleich ist; lege an PC in C den Winkel PCB gleich einem zweiten Winkel a des Dreiecks abc an. Der Schenkel CB treffe die Curve GBH in B.

Ziehe PB, lege in B an BP den Winkel PBA = c an, und verbinde den Durchschnittspunkt A des Schenkels BA und der Geraden MN mit dem Punkte P, so ist das Dreieck APB dem gegebenen Dreiecke abc ähnlich (I, 52).

113. In einem Kreis ist ein Dreieck ABC beschrieben, demselben Kreise ein zweites Dreieck einzubeschreiben, welches mit ABC perspektivisch liegt und einem gegebenen Dreiecke def ähnlich ist.

Auflösung. Fig. 123. Beschreibe über einer Seite AB des Dreiecks ABC einen Kreisbogen, dessen Winkel der halben Summe des Winkels C und eines der Winkel des Dreiecks def, z. B. e gleich ist, so daß also W. AOB = $\frac{1}{2}(C + e)$ ist. Ebenso beschreibe über AC einen Kreisbogen, dessen Winkel = $\frac{1}{2}(B + d)$ ist. Durch den Durchschnitt dieser Kreisbogen O ziehe die Geraden AO, BO, CO und verbinde die Durchschnitte F, D, E mit dem Kreise durch die Geraden DF, FE, DE, so bilden diese das verlangte Dreieck. — Es kann der Schnittpunkt der beiden Kreisbogen auch über den gegebenen Kreis hinausfallen, was in der Construktion nichts ändert.

114. Wenn die drei Höhen eines Dreiecks gegeben sind; aus denselben das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Fig. 124. Suche zur kleinsten, AD, mittlern, AB, und größten, AE, Höhe die vierte Proportionale BE und bilde aus dieser und den beiden vorhergehenden (nicht der kleinsten) ein Dreieck ABE. Wenn in demselben BE der vierten Proportionale entspricht, so fälle aus A auf diese ein Loth AG und schneide aus A auf demselben die kleinere Höhe AD ab; durch D ziehe mit BE die Parallele CF bis zum Durchschnitt mit den beiden andern Seiten, so erhält man das Dreieck ACF.

Denn es ist AB : BE = AC : CF und weil AD : AB = AE : BE, so ist auch AD : AE = AC : CF oder CF . AD = AE . AC, d. h. die zur

Grundlinie AC zugehörige Höhe ist AE. Ebenso wird gezeigt, daß zur Grundlinie AF die Höhe AB gehört. — Wohl zu bemerken ist, daß nicht aus drei beliebigen Höhen das zugehörige Dreieck construirt werden kann, sondern es muß immer, wenn h, h′, h″ die drei Höhen bezeichnen, $hh' + hh'' > h'h''$ sein, oder es muß aus der mittlern, größten und der vierten Proportionale zur kleinsten und den beiden vorhergehenden Höhen ein Dreieck gebildet werden können. — Wenn in einem rechtwinkeligen Dreiecke die eine Kathete kleiner ist als die Hälfte der andern, so ist das Dreieck aus den drei Höhen unmöglich und daher auch eine sonst in den Sammlungen vorkommende Methode der Auflösung, indem man aus den Höhen ein Dreieck construirt u. s. w., unstatthaft. Immer wird aber in diesen Fällen die obige Relation $hh' + hh'' > h'h''$ stattfinden müssen und daher die Auflösung nach vorstehender Methode möglich sein.

115. Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: eine Seite und die Halbmesser des ein- und umbeschriebenen Kreises.

Auflösung. Fig. 125. Beschreibe um die gegebene Seite den umbeschriebenen Kreis, halbire den Bogen AGB in G und beschreibe mit GA einen Kreis um G. In der Entfernung des Radius des einbeschriebenen Kreises von AB ziehe eine Parallele DE mit AB, welche den um G beschriebenen Kreis, z. B. in E, schneidet. Ziehe GE, welche den umbeschriebenen Kreis in C schneidet, und vollende das Dreieck ABC.

116. Eine Seite, die Differenz der andern Seiten und die Differenz der Winkel an der gegebenen Seite seien gegeben; das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Fig. 126. In dem einen Endpunkt A der gegebenen Seite AB lege einen Winkel BAD an, welcher der Hälfte des gegebenen Winkels (der Differenz der beiden an AB liegenden Winkel) gleich ist. Aus B durchschneide

AD mit der gegebenen Länge (der Differenz der beiden andern Seiten) und vollende über AD das gleichschenkelige Dreieck ACD, so ist ABC das verlangte Dreieck.

117. Von einem Dreiecke seien ein Winkel, die Höhe, welche aus der gegebenen Winkelspitze gefällt ist, und das Verhältniß m : n, in welche die Höhe ihre zugehörige Seite theilt, gegeben; das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Fig. 127. Auf einer Geraden schneide zwei Längen MP und PN ab, welche in dem Verhältnisse m zu n zu einander stehen; beschreibe über MN einen Abschnitt, welcher den gegebenen Winkel faßt, errichte in P auf MN das Loth PC, welches den Kreis in C schneidet, ziehe MC, CN, schneide auf CP die gegebene Höhe CD ab und ziehe durch D mit MN die Parallele AB, so ist ABC das verlangte Loth.

118. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren aus einer Kathete und dem gegenüberliegenden Abschnitte, welchen das Loth aus dem rechten Winkel auf der Hypotenuse bildet.

Auflösung. Fig. 128. Beschreibe über dem gegebenen Abschnitte AB als Durchmesser einen Kreis, ziehe durch A ein Loth auf AB und mache dasselbe der Kathete gleich; verbinde C mit der Mitte M von AB und schneide aus M die MC auf der Verlängerung von AM in MD ab; vollende über DB als Hypotenuse und AB als Abschnitt das rechtwinkelige Dreieck.

119. Von einem Dreiecke kennt man eine Seite, den Gegenwinkel und das Verhältniß der einschließenden Seiten; dasselbe zu construiren.

Auflösung. Fig. 129. Theile die gegebene Seite AB nach dem gegebenen Verhältnisse in D, beschreibe über AB einen Kreisabschnitt, welcher den gegebenen Winkel enthält, und halbire den gegenüberliegenden Bogen AEB in E. Wird ED gezogen, bis sie den Kreis in C schneidet, so ist ACB das verlangte Dreieck.

120. Von einem Dreiecke kennt man eine Seite a, den Gegenwinkel A und den Radius r des einbeschriebenen Kreises; das Dreieck zu vollenden.

Auflösung. Beschreibe über a einen Kreisabschnitt, welcher einen Winkel (90 + ½ A) faßt und ziehe mit a in einer Entfernung r eine Parallele; der Durchschnitt der letztern mit dem Kreisabschnitte gibt den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises. Das Dreieck kann dann leicht vollendet werden.

121. Aus den drei Geraden, welche die Ecken des Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Fig. 130. Theile jede Mittellinie in drei gleiche Theile, nimm von jeder zwei Drittheil und beschreibe mit diesen letztern drei Linien ein Dreieck BOG; halbire eine Seite OG dieses Dreiecks in F, verbinde F mit der Gegenecke B, verlängere BF und mache die Verlängerung FA der BF gleich, so ist AB eine Seite des verlangten Dreiecks, über welcher nun das Dreieck leicht vollendet werden kann.

122. Von einem Dreiecke kennt man eine Seite, den Gegenwinkel und die Summe der Seiten, welche den gegebenen Winkel einschließen; das Dreieck zu vollenden.

Auflösung. Fig. 131. Über AB beschreibe einen Kreisabschnitt, welcher den gegebenen Winkel faßt; in der Mitte E von AB errichte auf letzterer das Loth EM, welches den Kreis in M schneidet; mit MA beschreibe um M einen zweiten Kreis und trage aus A (oder B) die AD, welche der gegebenen Summe gleich ist, als Sehne ein. Wenn AD den Kreisbogen AMB in C schneidet, so ziehe CB, wodurch das verlangte Dreieck ACB vollendet ist.

Denn weil Winkel ADB = ½ ACB, so ist das Dreieck BCD gleichschenkelig und daher BC = CD.

123. Von einem Dreiecke kennt man eine Seite, den Gegenwinkel und die Differenz der beiden andern Seiten; das Dreieck zu vollenden.

Auflösung. Wenn AB die gegebene Seite ist, so beschreibe über derselben einen Kreisabschnitt, welcher den gegebenen Winkel faßt; errichte in der Mitte von BC ein Loth bis zum Durchschnitte M mit dem Bogen, auf welchem der gegebene Winkel stehen würde. Mit MA beschreibe um M einen zweiten Kreis und trage aus A in diesen die gegebene Differenz als Sehne ein. Verbindet man den Endpunkt der letztern mit B, so ist das verlangte Dreieck vollendet.

124. Von einem Dreiecke ist eine Seite, der derselben gegenüberliegende Winkel und ein Quadrat, welches dem Rechtecke aus den beiden andern Seiten gleich ist, gegeben. Man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Fig. 125. Beschreibe über der gegebenen Seite AB einen Kreisabschnitt, welcher den gegebenen Winkel faßt; suche zum Durchmesser dieses Kreises und zur Seite q des gegebenen Quadrats die dritte Proportionale p. In der Entfernung p von AB ziehe mit dieser Seite eine Parallele HC, welche den Kreis z. B. in C schneidet. Ziehe CA, CB, so ist das Dreieck ABC das verlangte.

Denn wenn F die Fläche eines Dreiecks ABC und R den Radius des umbeschriebenen Kreises bezeichnet, so ist (I, 69) $F = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$. Nach der Construktion ist aber auch $F = \frac{AB \cdot q^2}{4R}$, folglich ist $BC \cdot CA = q^2$.

125. Von einem Dreiecke ist eine Seite, der Gegenwinkel derselben und die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gegeben. Das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Fig. 132. Über der gegebenen Seite AB beschreibe einen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel faßt.

Halbire AB in D, in D errichte auf AB ein Loth DE. In dem Quadrate, welches der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich ist, halbire zwei an einander stoßende Seiten und verbinde ihre Mitten. Mit letzterer Geraden durchschneide das Loth DE aus A in E, und mit DE den umbeschriebenen Kreis aus D. Ist C ein solcher Durchschnitt, so ziehe CA, CB, wodurch das verlangte Dreieck entsteht.

Denn weil AE die Verbindungslinie der Mitten von zwei aneinander stoßenden Seiten des Quadrats ist, so ist $AE^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2)$, aber auch $AE^2 = AD^2 + DC^2$. Weil aber ferner DC eine Mittellinie des Dreiecks ABC ist, so ist auch $AD^2 + DC^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2)$, woraus die Richtigkeit der Construktion erhellet.

126. Von einem Dreiecke ist eine Seite, der Gegenwinkel derselben und die Differenz der Quadrate der anstoßenden Seiten gegeben.

Auflösung. Fig. 133. Beschreibe über der gegebenen Seite AB den Kreisabschnitt, welcher den gegebenen Winkel faßt. Wenn nun d die Seite des Quadrats ist, welches der Differenz der Quadrate der Seiten gleich ist, so suche zu AB und d die dritte Proportionale und schneide dieselbe aus B auf der Verlängerung von AB in BN ab; halbire AN und errichte in dem Halbirungspunkte M derselben die Senkrechte MC auf AB, welche den Kreis in C schneidet, ziehe CA, CB, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Denn es ist $AC^2 - BC^2 = AM^2 - BM^2 = AB \cdot BN = d^2$.

127. Aus der Summe dreier Seiten, der vierten Seite und den Winkeln ein Viereck zu construiren.

Auflösung. Fig. 134. Es sei die Seite CD und die Summe der andern Seiten MD, so lege in M die Hälfte des Winkels A, in D den Winkel D an. Die beiden andern Schenkel

dieser Winkel schneiden sich in F; in DF schneide aus D die Seite DC ab und lege in C an DC den gegebenen Winkel DCB an und an BC noch die Hälfte des gegebenen Winkels B. Der Schenkel CE dieses letztern Winkels schneide MF in E; halbire ME und errichte im Halbirungspunkte eine Senkrechte auf MF, welche MD in A schneidet; ziehe AE, welche CB in B schneidet, so ist ABCD das verlangte Viereck.

128. Den Ort des Punktes zu finden, aus welchem zwei in einer Richtung liegende an einander stoßende Längen unter gleichem Winkel erscheinen.

Auflösung. Fig. 135. Wenn AB, BC die beiden an einanderstoßenden Längen sind, so suche zu A, B, C den vierten harmonischen Punkt D, beschreibe über BD einen Halbkreis, so ist dieser der gesuchte Ort. Es wird z. B. AEC durch EB halbirt.

129. Ein Viereck zu construiren, welches sich in einen Kreis einbeschreiben läßt, wenn die vier Seiten desselben gegeben sind.

Auflösung. Fig. 136. Es seien a, b, c, d die vier gegebenen Seiten. Suche zu b, c, d die vierte Proportionale DE und schneide sie auf der Verlängerung von AD oder a aus D in DE ab. Theile AE in F so, daß sich AF zu FE wie b zu d verhält. Suche zu A, F, E den vierten harmonischen Punkt G und beschreibe über FG einen Halbkreis; diesen durchschneide aus D mit d in C, ziehe AC und vollende das Dreieck ABC mittelst der Linien AB und BC, welche den Längen b und c bezüglich gleich sind, so ist ABCD das verlangte Viereck.

Beweis. Es ist $AB : BC = b : c = DC : DE$ und

$$AF : FE = b : d = AC : CE,$$

woraus folgt, daß die Dreiecke ABC und CDE ähnlich sind. (Vergleiche die vorhergehende Aufgabe.) Es ist daher W. $CDE = ABC$, folglich $CDA + ABC = 180°$,

weswegen sich um das Viereck ABCD ein Kreis beschreiben läßt.

130. In einem gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, welches zugleich den Seiten nach centrisch ist (I, 46, 47).

Auflösung. Fig. 137. Im gegebenen Kreise nehme drei Punkte A, B, C willkürlich an und beschreibe über CB ein Dreieck CBD, in welchem W. CDB = 180 — A und die Differenz der einschließenden Seiten, CD — BD gleich der Differenz AC — AB ist, was nach Aufgabe 123 geschehen kann, so ist das Viereck ABCD das verlangte.

Denn weil A + D = 180, so ist das Viereck centrisch nach den Ecken, und weil CD + AB = AC + BD, so ist dasselbe auch centrisch nach den Seiten.

131. Um einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, welches zugleich centrisch nach den Ecken ist.

Auflösung. Beschreibe in den gegebenen Kreis ein beliebiges Viereck, aus dem Mittelpunkt fälle Senkrechte auf die vier Seiten, bis sie den Kreis schneiden. Durch die Durchschnittspunkte ziehe zu den treffenden Seiten parallele Tangenten, so bestimmen diese ein nach den Ecken centrisches Viereck.

132. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem dritten gegebenen Dreiecke ähnlich ist, wenn ein Eck desselben in einem bestimmten Punkte einer Seite liegen soll.

Die Auflösung läßt sich auf 113 zurückführen.

133. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem dritten ähnlich ist, wenn eine Seite desselben mit einer bestimmten Richtung parallel laufen soll.

Auflösung. Fig. 138. Ziehe durch einen Eckpunkt des gegebenen Dreiecks ABC, z. B. durch B eine Gerade BD, welche die gegebene Richtung hat; beschreibe über BD ein Dreieck BDE, welches dem gegebenen dritten Dreiecke ähnlich ist. Ziehe AE, welche die Seite BC in c schneidet,

und durch c mit ED, EB die Parallelen ca, cb und dann ab, so ist abc das verlangte Dreieck.

134. Um ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem dritten gegebenen Dreiecke congruent ist.

Auflösung. Fig. 139. Wenn ABC das gegebene Dreieck ist, so beschreibe über zwei Seiten, z. B. über AC und CB, Kreisbögen, von welchen jeder einen Winkel des gegebenen Dreiecks faßt. Da sich diese beiden Kreise in C schneiden, so lege durch C eine Gerade DE gleich der zwischen jenen Winkeln des gegebenen dritten Dreiecks liegenden Seite (101) und vollende das Dreieck DEF. In Fig. 140 sind ganz auf dieselbe Weise zwei Dreiecke von gegebener Größe so beschrieben, daß ihre Seiten durch drei in einer Geraden liegende Punkte A, B, C gehen. Zur Construktion des einen Dreiecks ist die Seite DG und die beiden anliegenden Winkel EDG und DGE und zur Construktion des andern die Seite D′G′ und die Winkel E′G′D′ und E′D′G′ gegeben.

135. Ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist und dessen Seiten von einem gegebenen Punkte O gegebene Entfernungen haben.

Auflösung. Fig. 141. Ziehe aus O die Geraden Om, On, Op unter Winkeln, welche bezüglich den Nebenwinkeln der Winkel des gegebenen Dreiecks abc gleich sind, und mache sie den gegebenen Entfernungen gleich. Errichte in m, n, p die Lothe AB, AC, BC, so ist das Dreieck ABC dem gegebenen Dreiecke abc ähnlich.

136. Drei Linien von gegebener Länge aus einem Punkte so zu ziehen, daß die Endpunkte in einer Geraden liegen und zugleich der Endpunkt der mittlern von den Endpunkten der beiden äußern gleich weit abstehe.

Auflösung. Beschreibe (Fig. 142) mit zwei der gegebenen Geraden AB, BD und mit der doppelten Länge AD der dritten AO ein Dreieck ABD. Vollende das Parallelo-

gramm ABDC, so liegen die Endpunkte B, O, C der drei Linien in einer Geraden und der Endpunkt O der mittlern steht von den Endpunkten B, C der beiden äußern gleich weit ab.

137. Zwei Kreise sind gegeben. Dieselben mit einer Geraden von gegebener Richtung so zu durchschneiden, daß in beiden gleiche Sehnen gebildet werden.

Auflösung. Fig. 143. Durch den Mittelpunkt des einen Kreises, z. B. durch A ziehe eine Parallele mit der gegebenen Richtung MN, welche im andern Kreise die Sehne DE erzeugt. Wird diese in C halbirt und aus C mit dem Radius des erstern Kreises A der Kreis B in F und G durchschnitten, so erzeugt die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte in beiden Kreisen die gleichen Sehnen FG und JK.

138. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Auflösung. Fig. 144. Ziehe in den beiden gegebenen Kreisen A und B zwei parallele Durchmesser DE, CF, ziehe DC, welche die Centrale AB in P schneidet, so können aus P an den Kreis B zwei Tangenten PG, PG″ gezogen werden, welche zugleich den Kreis A in H und H″ berühren. Zieht man DF oder EC, welche die Centrale in M schneiden, so können aus M an den einen Kreis ebenfalls zwei Tangenten gezogen werden (z. B. MH′), welche zugleich den zweiten Kreis berühren.

Oder: Beschreibe (Fig. 145) in dem größern Kreis A einen concentrischen Kreis EDF, dessen Radius der Differenz der Radien der beiden gegebenen Kreise gleich ist. Aus dem Mittelpunkte B ziehe an letztern die Tangenten BE und BF und durch die Endpunkte der Radien des äußern Kreises A, welche durch die Berührungspunkte des innern Kreises gezogen sind, die Parallelen HG, H′G′ mit BE und BF, wodurch man die beiden äußern Tangenten erhält. — Beschreibt man ebenso um A (Fig. 146)

einen Kreis DE mit einem Radius, welcher der Summe der Radien beider gegebenen Kreise gleich ist und zieht aus dem Mittelpunkt B des andern Kreises an letztern die Tangenten BE, BE′ und zu derselben durch die Schnittpunkte H, H′ der zugehörigen Radien AE, AE′ mit dem gegebenen Kreise A die Parallelen HG, H′G′, so sind diese die gesuchten innern Tangenten.

139. Drei nicht in einer Geraden liegende Punkte sind gegeben und drei Gerade von gegebener Länge; man soll die drei Geraden an die drei Punkte so legen, daß die Endpunkte derselben ebenfalls in einer Geraden liegen.

Auflösung. Beschreibe um die drei Punkte mit den gegebenen Längen als Radien Kreise und bestimme ihre Ähnlichkeitspunkte. Jede Ähnlichkeitsaxe, welche die drei Kreise schneidet, bestimmt durch ihre Schnittpunkte mit den Kreisen sechs Punkte, welche zu drei und drei mit den Mittelpunkten verbunden, der Aufgabe genügen.

140. Es sind zwei Kreise und eine Gerade gegeben; man soll auf der Geraden einen Punkt finden, so daß, wenn man aus dem Punkte Tangenten an die zwei Kreise zieht, dieselben mit der Geraden gleiche Winkel bilden.

Auflösung. Fig. 147. Fälle aus dem Mittelpunkte A des einen der gegebenen Kreise ein Loth auf die gegebene Gerade, verlängere dasselbe nach C, so daß DC = AD ist, beschreibe um C einen Kreis mit demselben Radius, mit welchem der Kreis A beschrieben ist. Zieht man nun an die Kreise B und C gemeinschaftliche Tangenten, so bestimmen dieselben durch ihre Durchschnitte mit der Geraden MN Punkte, aus denen man an den Kreis A Tangenten ziehen kann, welche der Aufgabe genügen.

141. Aus drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig berühren.

Auflösung. Beschreibe den innern Berührungskreis des Dreiecks ABC, so ergibt sich leicht die weitere Auflösung.

142. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei Punkte geht und einen zweiten gegebenen Kreis so schneidet, daß die gemeinschaftliche Sehne ein Durchmesser des letztern Kreises ist.

Auflösung. Fig. 148. Wenn A und B die gegebenen Punkte und O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises ist, so ziehe A O, suche zu A O und dem Halbmesser O D des gegebenen Kreises die dritte Proportionale O E und schneide dieselbe auf der Verlängerung von A O in O E ab. Durch die Punkte A, B, E ist der gesuchte Kreis bestimmt.

143. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise so schneidet, daß die Tangenten, welche durch die Schnittpunkte an letztere gezogen sind, sämmtlich durch den Mittelpunkt des erstern gehen. (Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise unter rechtem Winkel schneidet.)

Auflösung. Suche zu je zweien der gegebenen Kreise die Radikalare, ziehe aus ihrem Durchschnitte eine Tangente an den einen dieser Kreise, und mit derselben um den Durchschnittspunkt der Radikalaren einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

144. Einen Kreis zu beschreiben, welcher
a) durch zwei Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt;
b) durch einen Punkt geht und zwei Gerade berührt;
c) eine Gerade und einen Kreis in einem bestimmten Punkte,
d) einen Kreis und eine Gerade in einem bestimmten Punkte,
e) zwei Kreise und den einen in einem bestimmten Punkte
berührt.

Auflösung. ad a) 1) Es seien (Fig. 149) die beiden Punkte A und B und die Gerade M N gegeben. Wird A B gezogen, welche M N in P schneidet, so ist dieselbe offenbar die Radikalare aller Kreise, welche durch die Punkte A und B gehen. Beschreibt man daher einen beliebigen Kreis, welcher durch A und B geht, und zieht aus P eine Tangente P C an denselben, so braucht man blos auf M N die Längen P M, P N der P C gleich abzuschneiden, wodurch

man die Berührungspunkte der gesuchten Kreise erhält. Um die Punkte A, B, M und A, B, N können die Kreise beschrieben werden.

Oder: Suche zu PB, PA die mittlere Proportionale PM oder PN und schneide sie aus P auf der Geraden ab.

Oder (Fig. 150): Bestimme den Ort OC der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch die Punkte A und B gehen. Aus einem beliebigen Punkte D in OC beschreibe einen Kreis, welcher die gegebene Gerade berührt, ziehe CB (oder CA), welche den Kreis D in F und G schneidet, dann DG, DF und durch B mit DG, DF die BM′, BM″ parallel, welche OC in M′, M″ schneiden, so sind letztere Punkte die Mittelpunkte der verlangten Kreise.

ad b) Fig. 151. Es seien der Punkt A und die Geraden MN, MO gegeben. Halbire den Winkel OMN durch MG; fälle aus A auf MG das Loth Aa und mache die Verlängerung aB der Aa gleich, so ist B ein zweiter Punkt der gesuchten Kreise und die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

ad c) Fig. 152. Es sei A der gegebene Kreis mit dem Punkte B seines Umfangs und DE die gegebene Gerade — Wird durch den Punkt B an den Kreis A eine Tangente BC gezogen, so ist diese die Radikalaxe zu dem gegebenen und den gesuchten Kreisen. Schneidet man daher die Längen CD, CE auf der Geraden DE gleich der Tangente CB ab, so sind D und E die Berührungspunkte der gesuchten Kreise, durch welche man die Mittelpunkte M′, M″ derselben leicht findet.

Oder (Fig. 153): Fälle aus dem Mittelpunkte A auf die Gerade DF das Loth AG und durchschneide aus A mit AG die Linie AB in C und E. Zieht man GE, GC und mit diesen die BD, BF parallel, so sind D und F die Berührungspunkte.

ad d) Fig. 154. Es sei M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, NA die gegebene Gerade mit dem Punkte A.

Man suche die Potenzlinie HG des Kreises in Beziehung auf den gegebenen Punkt A, welche die Gerade NA in G schneidet und beschreibe um G mit GA einen Kreis, welcher den Kreis M in E und D trifft, so sind diese Punkte die gesuchten Berührungspunkte, aus denen man die Mittelpunkte M′, M″ der berührenden Kreise leicht findet.

Oder (Fig. 155): Ziehe durch M ein Loth CG auf NA, welches den Kreis M in C und F schneidet, dann CA, FA, welche den Kreis in E und D schneiden, so sind E und D die Berührungspunkte.

ad e) Fig. 156. Es sei der Kreis M mit dem Punkte A und der Kreis N gegeben. Suche die Potenzlinie des Kreises N in Beziehung auf den Punkt A, welche die Tangente AB des Kreises M in B schneidet und durchschneide aus B mit BA den Kreis N in D und C, so sind D und C die Berührungspunkte, durch welche die Mittelpunkte M′, M″ der Berührungskreise leicht gefunden werden.

Oder (Fig. 157): Ziehe durch den Mittelpunkt N des Kreises N die BB′ mit MA parallel, dann BA, B′A, welche den Kreis N in D und C schneiden, so sind diese die Berührungspunkte u. s. w.

145. Einen Kreis zu beschreiben, welcher

a) zwei Gerade und einen Kreis berührt;

b) eine Gerade und einen Kreis berührt und durch einen Punkt geht;

c) eine Gerade und zwei Kreise berührt;

d) durch zwei Punkte geht und einen Kreis berührt;

e) durch einen Punkt geht und zwei Kreise berührt.

Auflösung. ad a) Fig. 158. Es seien OA, OB die gegebenen Geraden, M der gegebene Kreis. Ziehe an den Kreis M mit den gegebenen Linien OA, OB parallele Tangenten, welche den Rhombus CDEF bilden, und

dann OD, OE, OF, OC, wodurch man die Berührungspunkte a, a'; b, b'; c, c'; d, d' erhält. Durch Verbindung dieser Punkte mit dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises, nachdem auch die Halbirungslinien OG, OH der Winkel AOB, AOG gezogen sind, erhält man in letztern die Mittelpunkte der acht Berührungskreise.

ad b) Fig. 159. Es sei der Kreis M, der Punkt A und die Gerade BC gegeben. Suche die Polare von A und die Radikalare DE des Kreises in Bezug auf den Punkt A. Ziehe mit BC parallele Tangenten, welche von der Polare in f und g geschnitten werden, dann Df, Dg, welche den Kreis in vier Punkten schneiden, so ist jeder Punkt ein Berührungspunkt, woraus die zugehörigen Mittelpunkte leicht gefunden werden können.

Oder (Fig. 160): Fälle vom Mittelpunkt M des gegebenen Kreises auf die Gerade das Loth BMC; lege durch den Punkt C, durch einen Durchschnittspunkt O der Linie BC mit dem Kreise und den gegebenen Punkt A einen Kreis. Ziehe AB, welche den letztern Kreis in D durchschneidet, so ist D ein Punkt, welcher auf der Peripherie des gesuchten Kreises liegen muß. Lege daher durch D und A Kreise, welche die Gerade berühren, so genügen dieselben der Aufgabe. Vertauscht man die Punkte O und B, so erhält man auf ähnliche Art zwei Kreise, welche den gegebenen Kreis einschließend berühren.

ad c) Fig. 161. Es seien A und B die beiden Kreise, MN die gegebene Gerade. Suche den äußern Ähnlichkeitspunkt S und die zugehörigen Polaren ab, a'b' der Kreise A und B, ebenso die Radikalare CD derselben. Ziehe an beide Kreise mit MN parallele Tangenten cd, ef; c'd', e'f', welche von den Polaren in d, f; d', f' geschnitten werden, dann Dd, Dd', Df, Df', so erhält man in den Kreisen A und B die Schnittpunkte n, n'; m, m'; h, h'; g, g', und diese sind zugleich die Berührungspunkte von Kreisen,

welche die gegebenen aus- und einschließend berühren. Sucht man dann ebenso den innern Ähnlichkeitspunkt und die zugehörigen Polaren, und verfährt wie vorher, so erhält man noch vier Kreise, welche je einen aus- und den andern einschließend berühren.

Oder (Fig. 162): Beschreibe um den Mittelpunkt A einen Kreis KR mit einem Radius, welcher der Summe der gegebenen Radien gleich ist, und ziehe auf der andern Seite von MN (in Bezug auf A) eine Parallele mn mit MN in einer Entfernung, welche dem Radius des Kreises B gleich ist. Beschreibe einen Kreis KL, welcher durch den Mittelpunkt B geht, die Gerade mn und den Kreis KR berührt. Der Mittelpunkt M′ dieses Kreises ist offenbar auch der Mittelpunkt des Kreises, welcher die beiden Kreise und die Gerade MN berührt. — Der gefundene Kreis berührt den einen Kreis einschließend, den andern ausschließend. Auf ähnliche Art wird verfahren, wenn man die Kreise sucht, welche erstern ausschließend und letztern einschließend oder beide Kreise zugleich aus- oder einschließend berühren.

ad d) Fig. 163. Es seien M der gegebene Kreis, A und B die gegebenen Punkte. Lege durch A und B einen beliebigen Kreis, welcher zugleich den Kreis M schneidet, ziehe die gemeinschaftliche Sehne CD, ebenso die Gerade AB bis zum Durchschnitte E mit CD, so ist der Punkt E das Radikalcentrum des gegebenen und der gesuchten Kreise. Zieht man also aus E an den Kreis M die Tangenten EF, EF′, so sind die Punkte F, F′ die Berührungspunkte, aus denen die Mittelpunkte der gesuchten Kreise leicht gefunden werden können. Man erhält die beiden Kreise M′ und M″.

ad e) Fig. 164. Suche einen Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise M, M′, z. B. den äußern D. Lege durch den gegebenen Punkt A einen Kreis AbBCc, welcher die gegebenen Kreise in b, B, C, c schneidet. Ziehe DA und

Bb, Cc bis zu ihren Durchschnitten H, F mit DA. Suche die Polare LL′ des Punktes H in Bezug auf den Kreis M und ebenso die Polare GG′ des Punktes F in Bezug auf den Kreis M′, so sind durch die Punkte A, L, G und A, L′, G′ zwei Kreise bestimmt, von welchen der eine die gegebenen Kreise sämmtlich ausschließend und der andere einschließend berührt. — Sucht man den innern Ähnlichkeitspunkt und verfährt wie vorher, so erhält man noch zwei Kreise, welche einen der gegebenen Kreise einschließend und den andern ausschließend berühren.

146. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Auflösung. Fig. 165. Es seien M, M′, M″ die gegebenen Kreise. Suche die Ähnlichkeitsaxen der drei Kreise A′A″, AJ′, A′J, A″J′ und zu diesen als Polaren die Pole in den Kreisen. Suche ferner das Radikalcentrum O und ziehe aus O nach den sämmtlichen zwölf Polen Gerade, welche die Kreise in vierundzwanzig Punkten schneiden, so sind dieselben die Berührungspunkte von acht Kreisen. In der Figur beziehen sich die Punkte a, b, c auf die Ähnlichkeitsaxe A, A′, A″, weswegen die gegebenen Kreise sämmtlich vom Kreis abc gleichartig berührt werden, hingegen die Punkte a′, b′, c′ auf die Axe A, J′, J″, weswegen der Kreis a′b′c′ und der ihm entsprechende a″b″c″ die gegebenen Kreise ungleichartig berührt.

Oder (Fig. 166): Es seien M, M′, M″ die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise und es möge der Kreis gesucht werden, welcher den Kreis M ausschließend, die Kreise M′, M″ aber einschließend berühren soll. Man beschreibe um die Mittelpunkte M′, M″ concentrische Kreise, deren Radien bezüglich der Summe der Halbmesser der Kreise M und M′, ebenso der Kreise M und M″ gleich sind. Beschreibt man nun einen neuen Kreis, welcher letztere Kreise berührt und durch den Mittelpunkt des Kreises M

geht, so ist offenbar der gefundene Mittelpunkt M''' zugleich der Mittelpunkt des Kreises, welcher die drei gegebenen Kreise berührt.

Ganz auf ähnliche Weise werden die übrigen Aufgaben der Art aufgelöset.

147. Blos mit dem Lineal die Polare eines gegebenen Punktes (Poles) in Bezug auf einen gegebenen Kreis zu finden.

Auflösung. Fig. 167. Ziehe durch den gegebenen Punkt P zwei Sehnen (Sekanten) AB und CD, verbinde die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise durch die Geraden AD, BC und AC, BD, welche sich bezüglich in E, F schneiden, und ziehe EF, so ist diese die verlangte Polare. — Liegt der gegebene Punkt auf dem Umfange des Kreises selbst, so erfolgt die Auflösung nach folgender Aufgabe.

148. Blos mit dem Lineal durch einen gegebenen Punkt des Kreisumfangs eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Fig. 168. Durch den gegebenen Punkt P ziehe eine Gerade PB und suche zu irgend einem Punkte a dieser Geraden mittelst der Sehnen PB, AC die Polare MN dieses Punktes. Ebenso suche die Polare M'N' eines zweiten beliebigen Punktes b dieser Geraden mittelst der Linien PB und AD. Die beiden Polaren MN, M'N' schneiden sich im Punkte Q; ziehe PQ, so ist diese die verlangte Tangente.

149. Blos mit dem Lineal zu einer gegebenen Geraden als Polare den zugehörigen Pol zu finden.

Auflösung. Nehme willkürlich in der gegebenen Geraden zwei Punkte an, suche zu jedem die zugehörige Polare. Der Durchschnitt der letztern ist der gesuchte Pol.

150. An zwei Kreise blos mit dem Lineal eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Auflösung. Fig. 169. Ziehe durch den Mittelpunkt A des einen Kreises einen Durchmesser EF, welcher verlängert

den zweiten Kreis in C und D schneidet; ziehe durch C einen Durchmesser des zweiten Kreises CG und dann DG, suche zu DG als Polare den zugehörigen Pol P und ziehe durch P und den Mittelpunkt B dieses letztern Kreises eine Gerade, so erhält man einen Durchmesser MN, welcher mit EF parallel ist. Die Durchschnitte der Linien MF und ME mit der Centrale AB sind die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise, aus welchen an letztere (nach III, 32, b) leicht Tangenten gezogen werden können.

151. Man weiß, daß zwei Gerade in zwei bestimmten Punkten einen Kreis berühren, welcher selbst aber nicht construirt ist; durch einen dritten gegebenen Punkt, welcher ebenfalls auf dem Umfange des Kreises liegt, blos mit dem Lineal eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Fig. 45. Wenn der Kreis von den Tangenten AB in c, AC in b berührt wird, und es soll an denselben durch den Punkt a eine Tangente gezogen werden, so ziehe ac bis zum Durchschnitte M mit der Tangente AC; ebenso ziehe ab bis zum Durchschnitte N mit AB. Ziehe MN, dann bc bis zum Durchschnitte P mit MN, endlich Pa, so ist diese eine Tangente des Kreises, welcher durch die Punkte a, b, c geht.

152. Wenn statt eines Kreises fünf Punkte seines Umfangs gegeben sind, blos mit dem Lineal beliebige andere Punkte des Umfangs zu finden.

Auflösung. Fig. 48. Es seien die Punkte A, B, C, D, E gegeben. Ziehe durch E beliebig die Gerade EF, dann die Linien AB und DE bis zu ihrem Durchschnitte N, hierauf BC bis zum Durchschnitte P mit EF; ziehe ferner PN und CD, welche PN in M schneidet, dann MA bis zum Durchschnitte F mit EF, so ist F ein Punkt des Kreisumfanges. Verändert man die Lage der Linie EF, so lassen sich noch beliebig viele andere Punkte des Kreisumfangs finden.

153. Es seien fünf Linien, von welchen man weiß, daß sie einen Kreis, welcher selbst nicht gezeichnet ist, berühren; man soll die Berührungspunkte finden.

Auflösung. Es mögen sich die Tangenten AB, BC, CD, DE, EA in den Punkten B, C, D, E, A schneiden. Ziehe AC und BD, welche sich in O schneiden; ziehe ferner EO, welche BC schneidet, so ist der Durchschnittspunkt beider Linien der Berührungspunkt in der Linie BC. Ganz auf dieselbe Weise werden die Berührungspunkte der übrigen Tangenten gefunden.

154. Wenn fünf Punkte des Kreisumfanges gegeben sind, durch einen dieser Punkte eine Tangente zu legen.

Auflösung. Wenn A, B, C, D, E die fünf gegebenen Punkte sind, so ziehe AB und DE bis zum Durchschnitte M, AE und BC bis zum Durchschnitte N; ziehe MN, welche von CD in P geschnitten wird, ferner AP, so ist diese Gerade eine Tangente des Kreises im Punkte A.

155. Drei Gerade Sx, Sy, Sz, welche sich in einem Punkte schneiden, sind gegeben und drei Punkte A, B, C, welche nicht in einer Geraden und nicht in den Linien Sx, Sy, Sz liegen; blos mit dem Lineal ein Dreieck zu construiren, von welchem eine Seite durch den Punkt A, die andere durch B und die dritte durch C geht, und dessen Ecken bezüglich in den drei Geraden SA, SB, SC liegen.

Auflösung. Fig. 170. Construire willkürlich das Dreieck abc, von welchem die Ecken in den Geraden, Sx, Sy, Sz liegen, und eine Seite durch den Punkt A, eine zweite durch den Punkt B geht; und nach denselben Bedingungen das Dreieck a′b′c′. Suche den Durchschnitt D der beiden übrigen Seiten bc und b′c′. Verbinde D mit C durch eine Gerade, welche die Linien Sy, Sz in N und M schneidet, und ziehe CA, welche Sx in O schneidet. Die Punkte O, B, M liegen dann in einer Geraden, wodurch man das verlangte Dreieck OMN erhält.

156. **Blos mit dem Lineal** ein Viereck zu beschreiben, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte A, B, C, D gehen und dessen Ecken in vier sich in einem Punkte schneidenden Strahlen Sv, Sx, Sy, Sz liegen.

Auflösung. Fig. 171. Beschreibe zwei Vierecke abcd, a'b'c'd', von welchen die Ecken in den Geraden Sv, Sx, Sy, Sz liegen, während drei Seiten ad, dc, cb und ebenso a'd', d'c', c'b' durch die Punkte A, B, C gehen. Der Schnittpunkt der beiden vierten Seiten sei E; ziehe ED, welche Sv in M und Sz in P schneidet, dann MA, welche Sx in N, dann NB, welche Sy in O schneidet, und endlich OP, so geht diese durch den Punkt C und das Viereck MNOP ist das verlangte.

157. Da zwei harmonische Gebilde Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sein können, und wenn solches der Fall ist, zu jedem andern Punkte M des einen Gebildes (Fig. 40) der entsprechende Punkt m des andern Gebildes leicht gefunden werden kann, indem man den dem Punkte M entsprechenden Strahl SM zieht, so ist die Aufgabe (Fig. 172): wenn zwei harmonische Gebilde so liegen, daß sie nicht Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind, zu irgend einem Punkte des einen Gebildes den entsprechenden Punkt im andern Gebilde zu finden.

Auflösung. Es seien ABC, abc die beiden harmonischen Gebilde (ein solches Gebilde ist durch drei Punkte bestimmt) und es soll im geraden Gebilde bac der Punkt d gefunden werden, welcher dem Punkte D des Gebildes ABC entspricht. Verbinde zwei homologe Punkte, z. B. C, c, und zugleich den einen dieser Punkte c noch mit einem zweiten Punkt A des Gebildes ABC. In Cc nehme beliebig den Punkt S als Mittelpunkt des harmonischen Strahlenbüschels SA, SB, SC an, so erhält man als Schnitt dieses Büschels das harmonische gerade Gebilde AB'c. Zieht man SD, so erhält man durch den

Durchschnitt dieser Geraden mit Ac den Punkt D′, welcher dem Punkte D entspricht. Zieht man ferner Aa, B′b, welche sich in S′ schneiden, dann S′c und SD′ bis zum Durchschnitt d mit bac, so ist S′A, S′B′, S′c ein harmonischer Strahlenbüschel, von welchem auch abc ein Schnitt ist. Da dem Punkte D′ der Punkt d entspricht, so ist dieser der gesuchte Punkt.

158. Ein Dreieck sei einem andern einbeschrieben, blos mit dem Lineal ein drittes Dreieck zu beschreiben, welches dem erstern umbeschrieben und dem andern einbeschrieben ist und dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Fig. 173. Es sei ABC ein dem Dreiecke abc umbeschriebenes Dreieck und m der gegebene Punkt. Ziehe Am, welche ab in c′ und ac in b′ schneidet, dann Cb′, welche bc in a′ schneidet, so liegen die Punkte a′, B, c′ in einer Geraden und a′b′c′ ist das verlangte Dreieck.

159. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

Auflösung. Fig. 174. Es seien A, B, C die drei gegebenen Punkte. Suche die Polaren DE, GF, JH der Punkte A, B, C und verlängere sie bis zu ihren Durchschnitten in M, N, O. Ziehe AN, BO, CM, welche die Polaren in a, b, c schneiden. Ziehe ferner ab, bc, ac, welche den Kreis in mm′, oo′, nn′ schneiden, so genügen die beiden Dreiecke mno, m′n′o′ der Aufgabe.

160. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken in drei gegebenen Geraden liegen.

Auflösung. Fig. 175. Es seien AB, BC, CA die drei gegebenen Geraden. Suche die Pole D, E, F derselben und ziehe die Geraden CD, AE, BF, welche einzeln die Seiten AB, BC, CA in G, J, H schneiden. Zieht man noch GJ, JH, HG, welche den Kreis in den Punkten m, m′; n, n′; o, o′ schneiden, so bestimmen die durch m, n, o

und m', n', o' an den Kreis gezogenen Tangenten zwei Dreiecke MNO, M'N'O', welche der Aufgabe genügen.

---

161. Drei nicht in einerlei Richtung liegende Gerade sind ihrer Größe nach gegeben; über denselben drei gleiche Dreiecke zu beschreiben, welche einerlei Spitze haben (I, 84, g).

162. Ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, dessen Eckpunkte in einer der Richtung nach gegebenen Geraden, einem Punkte und einem der Größe und Lage nach gegebenen Kreise liegen (I, 51).

163. Zwei Gerade werden von einer beliebigen Curve durchschnitten, in letzterer den Punkt zu finden, dessen Abstände von den Geraden ein gegebenes Verhältniß haben.

164. Einen Kreis zu beschreiben, welcher die Halbmesser und Bogen a) eines Quadranten, b) eines beliebigen Kreisausschnitts berührt.

165. Eine Gerade zu ziehen, welche einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade unter gleichem Winkel schneidet und einen gegebenen Kreis berührt (I, 55).

166. Durch vier Punkte A, B, C, D vier Parallelen so zu ziehen, daß die durch A und B gehenden denselben Abstand von einander haben, wie die durch C und D gehenden.

167. Durch den einen Durchschnittspunkt zweier Kreise eine Gerade zu ziehen, daß in beiden Kreisen ähnliche Bogen abgeschnitten werden.

168. Ein Dreieck so zu halbiren, daß zugleich die Umfange der beiden Hälften einander gleich sind (I, 63).

169. Zwischen den Schenkeln eines Winkels liegt ein Punkt. Durch letztern eine Gerade zu ziehen, daß die Summe der Abschnitte der Schenkel einer gegebenen Geraden oder das Rechteck derselben einer gegebenen Fläche gleich werde.

170. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, welcher einen zweiten der Lage und Größe nach gegebenen Kreis so schneide, daß die gemeinschaftliche Sehne derselben von gegebener Länge sei.

171. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und den Umfang eines zweiten gegebenen Kreises halbirt.

172. Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne zu ziehen, deren Abschnitte ein gegebenes Verhältniß haben.

173. In ein Dreieck zwei Kreise zu beschreiben, welche einander und zugleich je zwei Seiten des Dreiecks berühren.

174. Durch zwei gegebene Punkte zwei Gerade zu ziehen, welche sich auf dem Umfange eines gegebenen Kreises schneiden, so daß zugleich die Verbindungslinie der beiden andern Durchschnittspunkte mit der Linie, welche die gegebenen Punkte verbindet, parallel ist (I, 49).

175. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ein Dreieck zu construiren, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist, und dessen Ecken in den Schenkeln und in einem zwischen den Schenkeln sich befindlichen Punkte liegen (I, 52).

176. Im Dreiecke einen Punkt zu finden, so daß die Verbindungslinien desselben mit den Ecken sich wie $m : n : p$ verhalten.

177. Zwei concentrische Kreise mit einer Geraden so zu durchschneiden, daß die Sehnen in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

178. Ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke congruent ist, und dessen Seiten durch drei gegebene in einer Geraden liegende Punkte gehen.

179. Ein Dreieck zu beschreiben, welches mit einem gegebenen Dreiecke perspektivisch liegt, und einem zweiten gegebenen Dreiecke congruent ist.

180. Zwei feste Punkte sind gegeben. Aus jedem derselben drei Strahlen zu ziehen, welche unter sich bestimmte Winkel a, b; a′, b′ bilden, so daß die Durchschnittspunkte homologer Strahlen die Eckpunkte eines Dreiecks werden, welches einem gegebenen Dreiecke congruent ist.

Anhang.

I. Die regulären Figuren und der Kreis.

1. Jede reguläre Figur ist centrisch nach den Ecken und Seiten.

2. Zieht man vom Mittelpunkt des ein- oder umbeschriebenen Kreises Radien nach den Ecken eines Vielecks von n Seiten, so entstehen n congruente Dreiecke.

3. Jeder Centriwinkel in einem Dreiecke beträgt $\frac{360}{n}$ Grade, folglich jeder Umfangswinkel des Vielecks $\frac{180\,(n-2)}{n}$ Grade. Die Summe des Centriwinkels und Umfangswinkels beträgt folglich zwei Rechte.

4. Es hängt daher die Construktion eines regulären Vielecks von der Construktion des Winkels von $\frac{360}{n}$ Graden ab; weshalb sich das reguläre Dreieck, Viereck, Fünfeck, Fünfzehneck und die zugehörigen Vielecke von doppelter, vierfacher u. s. w. Seitenzahl construiren lassen.

5. Die Construktion der übrigen Vielecke ist nur näherungsweise möglich. Jedoch kann gezeigt werden, daß wenn die Zahl der Seiten eines Vielecks n eine Primzahl und $n - 1 = 2^p$ ist, die Berechnung (Construktion) des Vielecks auf die Auflösung von p quadratischen Gleichungen zurückgeführt ist. Es kann also unter andern auch das reguläre Siebenzehneck construirt werden.

6. Die Eintheilung des Kreises in n gleiche Theile ist einerlei mit der Construktion eines Vielecks von n Seiten.

7. Reguläres Sechseck. Soll dasselbe in einen Kreis beschrieben werden, so trage den Radius sechsmal nach einander als Sehne ein.

8. Zwölfeck. Beschreibe in den Kreis ein reguläres Sechseck und halbire jeden Bogen, welcher zu den einzelnen Seiten gehört. Durch Verbindung der Halbirungspunkte mit den anliegenden Eckpunkten entsteht offenbar das verlangte Zwölfeck.

Soll dasselbe über einer gegebenen Geraden AB construirt werden, so beschreibe über derselben ein gleichseitiges Dreieck ABC, fälle aus C auf AB ein Loth und verlängere dasselbe rückwärts, schneide von dieser Verlängerung aus C die Seite AB in D ab und beschreibe aus D mit DA einen Kreis, so läßt sich in diesen die Linie AB zwölfmal als Sehne eintragen.

Hieraus ist klar, wie man die übrigen Vielecke von doppelter Seitenzahl, nemlich das 24, 48 Eck u. s. w. erhält.

9. Reguläres Achteck. Soll dasselbe über einer Geraden AB als Seite beschrieben werden, so halbire AB in C, errichte in C das Loth CD = CA, verlängere CD rückwärts nach E, mache DE = DA, und beschreibe mit EA einen Kreis, so läßt sich in denselben die Seite AB achtmal als Sehne eintragen (Fig. 176).

Oder (Fig. 177): Halbire AB in C, errichte in C auf AB die Senkrechte CD = AC; verlängere AB auf beiden Seiten nach E und F, so daß AE = BF = AD ist. Über EF beschreibe das Quadrat EFHG und schneide aus den Ecken die EO = GN = GM = HL = HK = JF = AE ab, so ist ABJKLMNO ein reguläres Achteck.

10. Fünfeck. Ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser (Fig. 178) AB, CD, halbire DO in E, ziehe EB und

schneide EB auf EC in EF ab, ziehe BF, so läßt sich diese Linie fünfmal als Sehne in den Kreis eintragen.

Soll das Fünfeck über der Geraden AB als Seite beschrieben werden, so errichte in B auf AB die Senkrechte BC = AB, halbire AB in D, schneide von D auf der verlängerten AB die DE = DC ab, so ist AE die Höhe des Fünfecks. Errichtet man daher in D die Senkrechte DF = AE auf AB, ziehe AF, BF und errichte auf diesen als Grundlinie gleichschenkelige Dreiecke, deren Schenkel = AB sind, so entsteht das reguläre Fünfeck (Fig. 179).

11. Zehneck. Dasselbe kann nach dem Vorhergehenden leicht aus dem Fünfecke gefunden werden.

Oder: Theile den Radius nach stetiger Proportion, und trage die so gefundene mittlere Proportionale zwischen dem Radius und dem kleinern Abschnitte als Sehne in den Kreis ein.

Soll dasselbe über der Geraden AB construirt werden (Fig. 180), so errichte in B auf AB das Loth BC = AB, ziehe DC und schneide letztere aus D auf der verlängerten AB in AE ab. Über AB als Grundlinie beschreibe ein gleichschenkeliges Dreieck ABF, dessen Schenkel AF = AE ist. Beschreibt man ferner um F mit FA einen Kreis, so läßt sich in denselben die Seite AB zehnmal als Sehne eintragen.

12. Fünfzehneck. Beschreibe in den Kreis ein gleichseitiges Dreieck über dem Radius desselben und zugleich ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem Radius als Schenkel, in welchem der Winkel an der Spitze die Hälfte eines Winkels an der Grundlinie ist, so erhält man als Differenz der beiden Centriwinkel einen Winkel von 24 Graden. Die zugehörige Sehne ist daher die Seite des Fünfzehnecks.

13. Construktionen durch Näherung

a) des Siebenecks. Trage die halbe Seite des regulären Dreiecks als Sehne im Kreise ein, so ist diese näherungsweise die Seite des Siebenecks. Wird der Radius = 1 gesetzt, so ist die gefundene Seite um 0,002 zu klein.

b) des Neunecks. Fig. 181. Trage die Seite des regulären Dreiecks als Sehne ein, halbire AB in C, verlängere CB nach D, mache CD dem Radius gleich, beschreibe über CD das gleichseitige Dreieck CDE, ziehe EM, welche den Kreis in F schneidet, so ist BF näherungsweise die Seite des Neunecks. Diese Seite ist für den Radius = 1 ebenfalls um 0,002 zu klein.

II. Construktion quadratischer Gleichungen.

1. Construire den Ausdruck: $\frac{mn}{p}$, $m + \frac{x^2}{p}$, $\frac{1}{2}a + \frac{3bc}{d}$, $\frac{1}{3}\left(\frac{mn}{2p} - \frac{rv}{q}\right)$.

2. Construire: $\frac{abc}{de}$, $\frac{abd}{ce}$, $\frac{ab}{c} + \frac{def}{g}$, $\frac{ab}{c} + \frac{abd}{ce}$, $\frac{abcde}{mnop} - \frac{a^2b^2c}{d^2ef}$.

3. Construire: $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{(a + b)(a - b)}$.

4. Construire: $\sqrt{a^2 + \frac{bcd}{e}}$, $\sqrt{\frac{abm}{f} - c^2}$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2}$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2}$.

5. Construire: $\sqrt{\frac{a^2b^2 - c^2d^2}{mn}}$, $\sqrt{\frac{a^2b^2 + c^2d^2}{mn + op}}$.

6. Die Gleichung $x^2 + ax = bc$ zu construiren. Auflösung. Fig. 182. Da die gegebene Gleichung die beiden Wurzeln $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2}$ und $x = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2}$, d. h. eine positive und eine negative Wurzel hat, und offenbar der Ausdruck $\frac{\sqrt{4bc + a^2} - a}{2}$, in welchem $\sqrt{4bc + a^2}$

immer größer als a ist, positiv ist, so kann auch die erstere Wurzel leicht construirt werden. Denn man suche die mittlere Proportionale zwischen 4b und c oder b und 4c oder 2b und 2c, so kann man, wenn dieselbe mit y bezeichnet wird, ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten die Linien y und a sind, leicht construiren. Auf der Hypotenuse z schneide man die Länge a ab und halbire das übrige Stück derselben, so wird eine solche Hälfte die graphische Darstellung der (positiven) Wurzel $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2}$ der gegebenen Gleichung sein. Die zweite negative Wurzel ergibt sich aus der erstern, wenn man zu derselben a addirt und die auf diese Weise erhaltene Größe im negativen Sinne nimmt. Fügt man aber zu der Länge, welche man durch die Construktion der erstern Wurzel erhalten hat, die Länge a hinzu, so erhellet auf der Stelle, daß zwar der absolute Werth der zweiten Wurzel $-(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2})$, aber durchaus nicht die Bedingung dargestellt ist, daß diese Länge im negativen Sinne zu nehmen sei. Hieraus erhellet, daß, wenn es sich um die Construktion der Wurzel einer solchen Gleichung handelt, überhaupt nur die Linie, welche dem absoluten Werthe der Wurzeln entspricht, dargestellt werden soll, sowie es sich auch bei numerischer Berechnung um absolute Zahlen handelt, obgleich der gegebenen Gleichung zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe entsprechen. Aus der Natur der Aufgabe muß sich ergeben, welche der beiden gefundenen Wurzeln im gegebenen Falle zu nehmen sei. — Die beiden absoluten Werthe der gegebenen Gleichung können leicht auf folgende Weise gefunden werden. Wenn (Fig. 182) $AC = c$ und $AB = b$ (so, daß also $c > b$ ist), so schneide AB auf AC ab. Um die Punkte B und C beschreibe mit einem Halbmesser, welcher größer als die Hälfte von a ist, einen Kreis, trage in denselben die gegebene Linie a als Sehne ein, beschreibe mit ihrem

Abstande MF vom Mittelpunkt des Kreises um diesen einen zweiten Kreis, und ziehe aus A an letztern eine Tangente, welche den erstern Kreis in H und G schneidet, so ist AH die Darstellung des absoluten Werthes der ersten (positiven) und AG die der zweiten (negativen) Wurzel. Denn weil $AH \times AG = AB \times AC$, so ist, wenn AH mit x bezeichnet wird, sogleich $x(x + a) = bc$, d. h. $x^2 + ax = bc$. Die Auflösung kann auch nach der nächstfolgenden ausgeführt werden.

7. Die Gleichung $x^2 - ax = bc$ zu construiren. Weil die gegebene Gleichung ebenfalls eine positive und eine negative Wurzel hat, so gelten die in Nr. 6 gemachten Bemerkungen. Man erhält die Werthe: $x = \frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2} + \frac{1}{2}a$ und $x = -(\frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2} - \frac{1}{2}a)$. Nachdem $\frac{1}{2}\sqrt{4bc + a^2} + \frac{1}{2}a$, wie vorher gezeigt wurde, construirt ist, braucht man auf der gegebenen Länge nur die Länge a abzuschneiden und den Rest zu halbiren, so gibt eine solche Hälfte, im negativen Sinne genommen, die zweite negative Wurzel.

Oder (Fig. 183): Lege $AB = b$, $BC = c$ in einer Richtung an einander und ziehe durch B die $BD = a$ in beliebiger Richtung. Halbire AC und BD in H und G, errichte in H und G Lothe, welche sich in M schneiden, und beschreibe um M mit MA einen Kreis, welcher die verlängerte BD in F und E schneidet, so sind BF und BE die beiden Wurzeln. Denn bezeichnet man BE mit x, so ist, weil $BE \times BF = AB \times BC$, auch $x(x - a) = bc$, und offenbar entspricht BE dem Werthe der positiven und BF dem der negativen Wurzel.

8. Die Gleichung $x^2 + ax = -bc$ zu construiren.

Die gegebene Gleichung hat die beiden Wurzeln $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4bc}$ und $x = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4bc}$. In dem Falle, wenn $4bc > a^2$, kann überhaupt von der Construktion der Wurzeln keine Rede sein. Wenn $4bc < a^2$,

so sind beide Wurzeln negativ, und es lassen sich die absoluten Werthe ($\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4bc} \mp \frac{1}{2}a$) leicht, wie oben angegeben, finden.

Durch eine und dieselbe Construktion kann man die absoluten Werthe der beiden Wurzeln finden, wenn man $-x$ statt x in die gegebene Gleichung setzt, wodurch sich in den Wurzeln nichts ändert, als das Zeichen. Man erhält nemlich die beiden Wurzeln $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4bc}$ und $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4bc}$. Gibt man nun der Gleichung $x^2 - ax = -bc$ die Form $ax - x^2 = bc$ oder $x(a - x) = bc$, so erhält man folgende Constructionsmethode (Fig. 184): Wenn AC ($= c$) größer als AB ($= b$) ist, so schneide AB auf AC ab. Durch A ziehe in beliebiger Richtung eine Gerade und schneide auf derselben $AD = a$ ab. Halbire BC und AD in H und N, errichte in diesen Punkten auf BC und AD Lothe, welche sich in M schneiden, und beschreibe um M mit MB einen Kreis, so sind AF und AG die Wurzeln der obigen Gleichung (absolut genommen).

Denn setzt man $AF = x$, so erhält man $x(a - x) = bc$, d. h. $x^2 - ax = -bc$.

9. **Die Gleichung $x^2 - ax = -bc$ zu construiren.**

Da diese Gleichung mit der Hülfsgleichung in der vorhergehenden Nummer ganz und gar übereinstimmt, so erhält man auch dieselbe Construktion.

10. **Bemerkung über die Construktion der Gleichung $x^2 + ax = b$.**

Da die Glieder derselben nicht homogen sind, so kann sie auch nicht im Allgemeinen linearisch aufgelöst werden. Wenn man aber unter a und b gewöhnliche Zahlen versteht, so kann sie in Bezug auf ihre Construktion durch Einführung einer beliebigen Linieneinheit leicht homogen gemacht werden. Denn man setze $\frac{x}{E}$ statt x, so

erhält man $\frac{x^2}{E^2} + \frac{ax}{E} = b$ oder $x^2 + aEx = bE^2$. Diese Gleichung ist homogen, weil a und b gewöhnliche Zahlen sind, und kann daher leicht nach dem Vorhergehenden construirt werden. Z. B. Es sei die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = o$ gegeben, so erhält man die homogene Gleichung $5Ex - x^2 = 6E^2$, welche nach Nr. 8 construirt wird, wenn für E eine beliebige Länge angenommen wird.

IV. Anwendung der Algebra auf Geometrie, nebst Berechnung geradliniger Figuren.

Da sich Linien wie Zahlen verhalten, so führt man zur Berechnung statt der Linien ihre Maaßzahlen ein. Man mißt also die gegebenen Linien a, b, c u. s. w. mit einer und derselben Linien-Einheit, und rechnet dann mit den hieraus erhaltenen (absoluten) Zahlen. Gewöhnlich bezeichnet man diese Zahlen mit denselben Buchstaben, mit welchen man die zugehörigen Linien bezeichnet. Hieraus ist klar, was man unter dem Produkte ab zu verstehen hat.

Für die Berechnung der Figuren (in allgemeinen Zeichen) ist vorzüglich zu bemerken:

1) Jeder algebraische Ausdruck von einer einzigen Dimension stellt eine Linie dar; z. B. a; $m + n$; $\frac{ab}{c}$; $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{abc}{d}}$; $\sqrt{a^2 + bc}$; $\sqrt{ab - \frac{cdf}{g}}$ u. s. w.

2) Jeder Ausdruck von zwei Abmessungen stellt eine Fläche dar; z. B. ab; $\frac{abc}{d}$; $\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2}{cd + mn}$ u. s. w.

3) Alle Glieder eines algebraischen Ausdrucks, welcher sich auf geometrische Größen bezieht, müssen homogen sein. Sie verlieren die Homogenität, wenn eine zur Figur gehörige Linie zur Einheit des Maaßes genommen ist (wie dies in der Trigonometrie vorkommt); jedoch kann ein

solcher Ausdruck durch gehörige Substitution wieder homogen gemacht werden.

4) In jeder Figur kann jede Linie durch die anderen ohne Hülfe von Winkeln bestimmt werden, wenn nur erstere in solcher Anzahl als gegeben oder bekannt vorhanden sind, daß durch sie die Figur vollkommen bestimmt ist; dasselbe gilt von den Winkeln.

---

1. Wenn die Seite eines Quadrats mit a, die Fläche mit F, die Diagonale mit d bezeichnet wird, so ist

$$d = a\sqrt{2};\ F = a^2 = \tfrac{1}{2}d^2;\ a = \sqrt{F} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Anmerkung. Obgleich $\sqrt{F}$ eigentlich eine Dimension $= \frac{1}{2}$ hat, so drückt in diesem Falle doch $\sqrt{F}$ eine gerade Linie aus, weil man sich unter F den Flächeninhalt, also eine Größe zweier Dimensionen zu denken hat. Man bezeichnet daher auch die Fläche mit F^2 u. s. w.

Beispiel. Es sei $a = 6{,}4$; so ist $d = 9{,}0509$ und $F = 40{,}96$.

2. Man soll ein Quadrat bilden, dessen Diagonale 25,6 Zoll lang ist, wie groß ist die Seite desselben?

Antwort. $a = 18{,}103$.

3. Welchen quadratischen Flächenraum kann man mit einer Kette von 100′ Länge umspannen?

Antwort. 625 Quadratfuß.

4. Es soll ein Rechteck, dessen Seiten a und b sind, in ein anderes verwandelt werden, dessen Diagonale noch einmal so lang ist. Wie heißen die Seiten desselben?

Antwort. Die Seiten des verlangten Rechtecks sind bestimmt durch $\dfrac{\sqrt{4a^2 + 4b^2 + 2ab} \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2 - 2ab}}{2}$.

5. Wenn F den Inhalt und U den Umfang eines Rechtecks bezeichnet, die Seiten a und b desselben zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $a = \frac{U + \sqrt{U^2 - 16F}}{4}$, $b = \frac{U - \sqrt{U^2 - 16F}}{4}$.

6. Wie verhalten sich die beiden Seiten eines Rechtecks, welches gleichen Umfang mit einem Quadrate, dessen Seite a ist, hat, wenn ihre Flächen sich wie m zu n verhalten sollen?

Antwort. Wie $1 + \sqrt{1 - \frac{m}{n}}$ zu $1 - \sqrt{1 - \frac{m}{n}}$.

7. Aus der Diagonale d und der Fläche F die zwei Seiten a und b eines Rechtecks zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $a = \sqrt{\frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}\sqrt{d^4 - 4F^2}}$,
$b = \sqrt{\frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}\sqrt{d^4 - 4F^2}}$.

8. Im Rechtecke verhalte sich der Umfang zur Diagonale wie 14 zu 5, der Inhalt sei 768 Q. Ruthen 60 Q. Fuß, wie groß ist jede Seite?

Antwort. Die eine Seite ist = 320,124 F., die andere 240,093 F.

9. Aus der Diagonale und Differenz der Seiten den Inhalt des Rechtecks zu finden.

Antwort. Wenn die Diagonale mit d, die Differenz der Seiten mit δ bezeichnet wird, so ist $F = \frac{1}{2}(d^2 - \delta^2)$.

10. Aus der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, welche 55 Fuß lang ist, den Inhalt zu finden.

Antwort. Es ist F = 1746 □ F. 48 □ Z.

11. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks soll 672 □ F. 78 □ Z. (Duod. M.) sein, wie groß ist jede Seite?

Antwort. 39′ 4″ 11‴.

12. Wenn in ein gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben ist, daß je eine Seite des einen Dreiecks auf einer Seite des andern senkrecht steht, so verhält sich die Fläche des umbeschriebenen zu der des einbeschriebenen wie 3 zu 1.

13. Wenn a die Seite eines Quadrats ist, so ist die Fläche des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, von welchem eine Winkelspitze in einer Winkelspitze des Quadrats liegt, ausgedrückt durch

$$F = a^2 \sqrt{3}\,(2 - \sqrt{3}).$$

14. Das reguläre Sechseck, welches entsteht, wenn jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Theile getheilt und die Theilungspunkte verbunden werden, verhält sich zum gleichseitigen Dreieck wie 2 zu 3.

15. Der Inhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks sei 194 Quadrat-Ruthen 48 □ Fuß, die Höhe sei noch einmal so groß als die Grundlinie, wie groß ist letztere und ein Schenkel?

Antwort. Die Grundlinie enthält 13 Ruthen 9,4 Fuß; ein Schenkel 28 Ruthen 7,4 Fuß.

16. Der Umfang eines gleichschenkeligen Dreiecks sei 538 Fuß, die Höhe auf der Grundlinie 24 Fuß, wie groß ist der Inhalt und ein Schenkel?

Antwort. Inhalt = 3202 □ F. 30 □ Z.; ein Schenkel = 135,57 Fuß.

17. Die Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sei 8′; das Verhältniß der zugehörigen Höhe zur Höhe auf dem Schenkel sei 5 : 6, die einzelnen Stücke zu berechnen.

Antwort. Es ist die Höhe auf der Grundlinie = $5\frac{1}{3}$; ein Schenkel = $6\frac{2}{3}$, zugehörige Höhe = $6\frac{2}{5}$; Inhalt = $21\frac{1}{3}$ □′.

18. Wenn a die Grundlinie eines Dreiecks, h die zugehörige Höhe und b die Seite des einbeschriebenen Quadrates, welches auf der Grundlinie steht, bezeichnet, so ist immer

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h}.$$

19. Aus den beiden Höhen das gleichschenkelige Dreieck zu berechnen.

Antwort. Wenn h und h, die zur Grundlinie und einem

Schenkel gehörigen Höhen bezeichnen, so ist die Grundlinie $= \frac{2hh,}{\sqrt{(2h + h,)(2h - h,)}}$,

jeder Schenkel $= \frac{2h^2}{\sqrt{(2h + h,)(2h - h,)}}$,

Inhalt $= \frac{h^2 h,}{\sqrt{(2h + h,)(2h - h,)}}$.

20. Das Verhältniß der Abschnitte eines Schenkels, welche durch die zugehörige Höhe gebildet werden, sei 7 : 2; die Grundlinie sei a; das gleichschenkelige Dreieck zu bestimmen.

Antwort. Es ist jeder Schenkel $= \frac{3}{2}a$, der eine Abschnitt $\frac{7}{6}a$, der andere $\frac{1}{3}a$; die Höhe, welche zur Grundlinie gehört, $= a\sqrt{2}$, die Höhe auf einem Schenkel $= \frac{2}{3}a\sqrt{2}$.

21. Wenn der Umfang U eines rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreiecks gegeben ist, die Katheten und die Hypotenuse zu finden.

Antwort. Es ist jede Kathete $= \frac{1}{2}U(2 - \sqrt{2})$;
Hypotenuse $= U(-1 + \sqrt{2})$.

22. Aus dem Inhalte F und dem Umfange U eines rechtwinkeligen Dreiecks die Seiten zu bestimmen.

Antwort. Man erhält die beiden

$$\text{Katheten} = \frac{U^2 + 4F \pm \sqrt{U^4 - 24U^2F + 16F^2}}{4U};$$

$$\text{Hypotenuse} = \frac{U^2 - 4F}{2U}.$$

23. Im rechtwinkeligen Dreiecke sollen Hypotenuse und beide Katheten rationale Zahlen sein; welche Form müssen dieselben haben?

Antwort. Wenn m und n rationale Zahlen bezeichnen, so stellt sich die eine Kathete unter der Form $m^2 - n^2$, die andere unter $2mn$ und die Hypotenuse unter $m^2 + n^2$

bar. Man erhält z. B. in ganzen Zahlen für die beiden Katheten und die Hypotenuse der Reihe nach die Werthe: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; u. s. w. ebenso die Vielfachen der zusammengehörigen Werthe.

24. Sind einem rechtwinkeligen Dreiecke, dessen Hypotenuse a und Katheten b und c sind, zwei Quadrate einbeschrieben, von denen das eine auf der Hypotenuse, das andere auf einer Kathete steht, so verhalten sich ihre Seiten wie $a\,(b^2 - c^2)$ zu $b^3 - c^3$.

25. Im rechtwinkeligen Dreiecke sei h die Höhe, welche zur Hypotenuse gehört, und die Abschnitte derselben verhalten sich wie m zu n, so ist

der eine Abschnitt $= h\sqrt{\frac{m}{n}}$, der andere $= h\sqrt{\frac{n}{m}}$;

die eine Kathete $= h\sqrt{\frac{m+n}{n}}$, die andere $= h\sqrt{\frac{m+n}{m}}$;

die Hypotenuse $= \frac{h\,(m+n)}{\sqrt{mn}}$.

26. Wenn a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks bezeichnen, so soll der Inhalt desselben durch Rechnung gefunden werden.

Antwort. Wenn h die zur Seite a gehörige Höhe bezeichnet, so findet man

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

womit sich die Fläche F durch die Relation

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

ergibt. (Vergleiche I, 59. Anm.)

27. In einem Dreiecke seien die Seiten a, b, c bezüglich 1) 24, 25, 37′, 2) 450, 344, 183 Fuß lang, den Inhalt zu bestimmen.

Antwort. 1) F = 297 □′ 2) F = 28814 □′.

28. Obgleich im Dreiecke die Summe zweier Seiten immer größer als die dritte Seite ist, so gilt die ähnliche Behauptung nicht für die drei Höhen des Dreiecks. Aber immer läßt sich zeigen, daß die Summe der Rechtecke aus je zweien größer ist, als das Rechteck aus den beiden übrigen. Wenn demnach α, β, γ die Höhen bezeichnen, so ist immer

$$\alpha\beta + \alpha\gamma > \beta\gamma.$$

29. Die Längen der zu den Seiten a, b, c eines Dreiecks gehörigen Höhen zu berechnen, wenn $a = 34{,}15$; $b = 46{,}18$; $c = 53{,}73$ Fuß ist.

Antwort. Man findet die Höhen bezüglich 45,78′; 33,86′; 29,1′.

30. Wenn m, $m_{,}$, m_2 die Linien bezeichnen, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, den Inhalt des Dreiecks durch dieselben auszudrücken.

Antwort. Man erhält

$$F = \tfrac{1}{3}\sqrt{(m+m_{,}+m_2)(m+m_{,}-m_2)(m+m_2-m_{,})(m_{,}+m_2-m)}.$$

31. Es seien h, $h_{,}$, h_2 die Lothe, welche aus den Spitzen eines Dreiecks auf die Gegenseiten gefällt sind; durch dieselben die Fläche des Dreiecks auszudrücken.

Antwort. Man erhält $F =$

$$\frac{h^2 h_{,}^2 h_2^2}{\sqrt{(hh_{,}+hh_2+h_{,}h_2)(hh_2+h_{,}h_2-hh_{,})(hh_{,}+h_{,}h_2-hh_2)(hh_{,}+hh_2-h_{,}h_2)}}.$$

32. Wenn O den Durchschnitt der drei Höhen eines Dreiecks ABC und F die Fläche desselben bezeichnet, so ist

$$AO = \frac{a\,(b^2 + c^2 - a^2)}{4F},$$

$$BO = \frac{b\,(a^2 + c^2 - b^2)}{4F},$$

$$CO = \frac{c\,(b^2 + c^2 - a^2)}{4F}.$$

33. Wenn im Dreiecke ABC ein Winkel A durch die Linie p halbirt wird, so ist

$$p^2 = \frac{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}{(b+c)^2}.$$

34. Wenn 2a, 2b, 2c die drei Seiten eines Dreiecks und m, $m_,$, m^2 die Verbindungslinien der Mitten dieser Seiten mit den Gegenecken bezeichnen, so ist

$$m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \qquad a^2 = \tfrac{1}{9}(2m_,^2 + 2m_2^2 - m^2),$$
$$m_,^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \quad \text{und} \quad b^2 = \tfrac{1}{9}(2m^2 + 2m_2^2 - m_,^2),$$
$$m_{,,}^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \qquad c^2 = \tfrac{1}{9}(2m^2 + 2m_,^2 - m_2^2).$$

35. Wenn R den Radius des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises und r, r′, r″, r‴ die der einbeschriebenen Kreise bezeichnet, so ist

$$4R + r = r' + r'' + r''',$$

wo F die Dreiecksfläche ist.

36. Ist in einem Dreiecke ABC ein Punkt O so bestimmt, daß aus ihm die drei Seiten unter gleichem Winkel erscheinen, und sind m, n, p die Linien, welche den Punkt O mit den Ecken A, B, C verbinden, so ist immer die Dreiecksfläche F bestimmt durch

$$F = \tfrac{1}{4}(mn + mp + np)\sqrt{3}.$$

37. Sind in einem Dreiecke ABC aus den Ecken A und B auf die Gegenseiten die Lothe AD, BE gefällt, so ist

$$AB^2 = BC \cdot BD + AC \cdot AE.$$

38. Sind die vier Berührungskreise eines Dreiecks bestimmt, so ist dasselbe die mittlere Proportionale zwischen dem Dreiecke, dessen Ecken die Mittelpunkte der drei äußern Berührungskreise sind und dem Dreiecke, dessen Ecken die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises sind.

39. Wenn der Radius des einem Dreiecke einbeschriebenen Kreises mit r, die Radien der äußern Berührungskreise mit

$r_{,}$, r_2, r_3 bezeichnet werden, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_{,}} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

40. Wenn noch h, $h_{,}$, h_2 die drei Höhen desselben Dreiecks sind, so ist auch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h_{,}} + \frac{1}{h_2}.$$

41. Wenn F die Fläche desselben Dreiecks und a, b, c die Seiten, welche von den Kreisen, deren Radien $r_{,}$, r_2, r_3 sind, berührt werden, bezeichnen, so ist.

$$F = \frac{r_{,} r_2 r_3}{\sqrt{r_{,} r_2 + r_{,} r_3 + r_2 r_3}};$$

$$a = \frac{r_{,} (r_2 + r_3)}{\sqrt{r_{,} r_2 + r_{,} r_3 + r_2 r_3}}, \quad b = \frac{r_2 (r_{,} + r_3)}{\sqrt{r_{,} r_2 + r_{,} r_3 + r_2 r_3}},$$

$$c = \frac{r_3 (r_{,} + r_2)}{\sqrt{r_{,} r_2 + r_{,} r_3 + r_2 r_3}}.$$

42. Wenn von einem Dreiecke eine Seite a, die Summe s der beiden übrigen und die zu a gehörige Höhe h gegeben sind; das Dreieck zu bestimmen.

Antwort. Man erhält die beiden Seiten, deren Summe = s ist, aus dem Ausdrucke

$$\tfrac{1}{2} s \pm \tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{s^2 - a^2 - 4h^2}{s^2 - a^2}}.$$

43. Es sei die Seite a = 315 Fuß, zugehörige Höhe = 84, die Summe der beiden Seiten = 594′; wie groß ist jede der beiden übrigen Seiten?

Antwort. Die eine Seite ist = 445,4773, die andere ist = 148,5227.

44. Gegeben sei die Grundlinie = 8′, Höhe = 5′, eine zweite Seite = 6′; wie groß ist die dritte Seite?

Antwort. 6,85 Fuß.

45. Die durch die Höhe gebildeten Abschnitte einer Seite seien 54′, 36′ und die Summe der andern Seiten sei 200′; wie groß ist jede Seite?

Antwort. Die eine Seite = 104,05′; die andere = 95,95′.

46. Die beiden Abschnitte seien 104′; 36′; die Differenz der andern Seiten sei 34′; wie groß ist jede Seite?

Antwort. Die eine Seite ist = 157′; die andere = 123′.

47. Ein Rechteck zu finden, welches mit einem Dreiecke gleichen Inhalt und Umfang hat, wenn die Seiten des letztern 30′; 40′; 50′ lang sind.

Antwort. Die eine Seite ist 47,32.., die andere 12,68..

48. Um wie viel muß die Grundlinie AB = 45 F. verlängert werden, wenn das Dreieck ABC in ein anderes verwandelt wurde, dessen Spitze D in der Linie BC um 26 Fuß von B liegt, während BC 39 Fuß Länge hat?

Antwort. Um $22\frac{1}{2}$ Fuß.

49. Wenn das Dreieck ABC durch eine Parallele mit AC im Verhältniß von m zu n getheilt werden soll; in welcher Entfernung von B auf AB muß die Parallele mit AC gezogen werden?

Antwort. Die Entfernung ist bestimmt durch $a\sqrt{\frac{m}{n}}$.

50. Auf der Verlängerung der Dreiecksseite BC eines Dreiecks ABC sei ein Punkt P um m Fuß von B entfernt, und durch den Punkt P eine Gerade gezogen, so daß das zwischen P und der Seite AC liegende Stück von AB halbirt ist. Wie weit ist der Durchschnittspunkt in der Linie AC von A entfernt?

Antwort. Um $\frac{mb}{a}$ Fuß.

51. Den Radius r eines Kreises zu finden, welcher in einen Quadranten so einbeschrieben ist, daß beide Halbmesser und der Bogen berührt werden.

Antwort. Wenn R den Halbmesser des gegebenen Kreises bezeichnet, so ist

$$r = R\,(-1 + \sqrt{2}).$$

52. Es seien die Entfernungen zweier Punkte von einer Geraden a, b; die Entfernung ihrer Fußpunkte = c, so ist der Radius des Kreises, welcher durch die zwei Punkte geht und die Gerade berührt, ausgedrückt durch

$$r = \frac{m^2\,(a + b) \pm 2mc\,\sqrt{ab}}{2\,(a - b)^2},$$

wo $m = \sqrt{(a - b)^2 + c^2}$ ist.

53. Wenn in einem Kreisausschnitte ein Quadrat einbeschrieben ist, von welchem zwei Ecken im zugehörigen Bogen liegen und man bezeichnet mit a die Sehne desselben und mit h die Entfernung des Mittelpunkts von derselben, so ist der Inhalt F des Quadrats bestimmt durch

$$F = \frac{a^2\,(a^2 + 4h^2)}{a^2 + 4\,(a + h)^2}.$$

54. Es seien zwei Kreise, deren Mittelpunkte A und E, und in AE ein Punkt C gegeben; durch diesen Punkt C eine Gerade zu legen, welche den Kreis A in B und den Kreis E in D trifft, so daß die Abschnitte BC und CD sich wie m zu n verhalten.

Antwort. Es ist die Entfernung BC bestimmt durch

$$BC^2 = \frac{m}{n}\,\frac{m\,AC\,(EC^2 - R^2) - n\,.\,EC\,(AC^2 - r^2)}{m\,.\,EC - n\,.\,AC},$$

wo R und r die Radien der Kreise E und A sind.

55. Es sind zwei concentrische Kreise gegeben; man soll durch einen Punkt A des äußern Kreises eine Gerade so ziehen, daß sich die Sehnen wie m zu n verhalten.

Antwort. Bezeichnet man den Radius des äußern Kreises mit $r_{,}$, den des innern mit r, die Länge der Sehne vom Punkte A bis zum Durchschnitte mit dem innern Kreise

mit x, so ist

$$x = \sqrt{\frac{m - n}{m + n}(r_,^2 - r^2)}.$$

56. In einen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten sich wie m zu n verhalten.

Antwort. Man erhält die eine Seite $= 2rm \sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}$, die andere $= 2rn \sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}$, wo r den Radius des Kreises bezeichnet.

57. Durch einen Punkt A im Kreise eine Sehne zu ziehen, deren Abschnitte sich verhalten wie m zu n.

Antwort. Bezeichnet man die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkt mit a, so sind die beiden Theile der Sehne ausgedrückt durch

$$\sqrt{\frac{m}{n}(r^2 - a^2)} \text{ und } \sqrt{\frac{n}{m}(r^2 - a^2)},$$

wo r den Radius des Kreises bezeichnet.

58. Durch zwei Punkte A, B außerhalb eines Kreises zwei Gerade so zu ziehen, daß sie sich in einem Punkte des Umfangs durchschneiden, und daß die beiden andern Punkte in einer Parallelen zur Linie AB liegen.

Antwort. Fällt man vom Mittelpunkt M des Kreises, dessen Radius $= r$ die Senkrechte $MF = h$ auf AB, setzt $AF = a$, $BF = b$ und die Tangenten aus A und B an den Kreis $= m$ und n, so ist die Entfernung x der verlangten Parallelen vom Mittelpunkt M bestimmt durch die Gleichung:

$$(r^2 - x^2)(n^2 a - m^2 b)^2 = (n^2 - m^2)^2 (r^2 - hx)^2.$$

59. Eine Gerade und außerhalb derselben sind zwei Punkte A und B gegeben. In der Geraden den Punkt C zu suchen, so daß die Linien CA und CB mit der gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden, wenn die Lothe aus den Punkten A und

B auf die Gerade 7 und 9 Fuß betragen, und ihre Fußpunkte 5 Fuß entfernt sind.

Antwort. Der Punkt C ist vom Fußpunkt des Lothes, welches aus dem Punkte A gefällt ist, um $2\frac{3}{16}$ Fuß entfernt.

60. Sind von einem Dreiecke die Radien des umbeschriebenen und eines der einbeschriebenen Kreise bekannt, so ist durch dieselben auch die Entfernung ihrer Mittelpunkte bestimmt. Bezeichnet man nemlich mit R den Radius des umbeschriebenen und mit r, r′, r″, r‴ die Radien der Berührungskreise, so ist immer die Entfernung E, E′, E″, E‴ bestimmt durch

$$E^2 = R^2 - 2Rr,$$
$$E'^2 = R^2 + 2Rr',$$
$$E''^2 = R^2 + 2Rr'',$$
$$E'''^2 = R^2 + 2Rr''',$$

wo r den Radius des in das Dreieck beschriebenen Berührungskreises bezeichnet.

61. Wenn die Radien zweier Kreise mit R, r und ihre Centrale mit a bezeichnet wird, so ist die Entfernung der beiden Ähnlichkeitspunkte ausgedrückt durch

$$\frac{2Rra}{R^2 - r^2}.$$

62. Zwei Punkte A und B seien von einer Geraden 12 und 6 Linieneinheiten und die Fußpunkte der Lothe, welche aus ihnen auf die Gerade gefällt sind, 6 gleiche Einheiten von einander entfernt. Die Längen der Radien der Kreise zu bestimmen, welche durch die Punkte gehen und von der Geraden 2 Linieneinheiten abschneiden.

Antwort. Der Radius des einen Kreises ist $\sqrt{470 + 36\sqrt{145}}$, der andere $\sqrt{470 - 36\sqrt{145}}$.

63. Die Radien der Kreise zu bestimmen, welche einen Kreis, eine Gerade berühren, und durch einen gegebenen Punkt gehen, wenn die Lothe, welche aus dem Mittelpunkte des Kreises und vom gegebenen Punkte gefällt sind, bezüglich die Längen 6 und 1 haben und die Entfernung ihrer Fußpunkte $= 4$, sowie der Radius des gegebenen Kreises $= 1$ gesetzt ist.

Antwort. Man erhält die Längen x der Radien für die Kreise, welche den gegebenen Kreis ausschließend berühren,

$$x = \frac{83 + 4\sqrt{70}}{18} \text{ und } x = \frac{83 - 4\sqrt{70}}{18}$$

und für die Kreise, welche den gegebenen einschließend berühren,

$$x = \frac{29 + 10\sqrt{2}}{4} \text{ und } x = \frac{29 - 10\sqrt{2}}{4}.$$

64. In einem Kreise, dessen Radius = r ist, zwei Sehnen durch einen und denselben Punkt zu einander senkrecht zu ziehen, von denen die eine das m fache der andern ist.

Antwort. Wird die Entfernung des gegebenen Punktes vom Mittelpunkt durch a bezeichnet, so erhält man die Längen der Sehnen

$$\sqrt{\frac{8r^2 - 4a^2}{1 + m^2}} \text{ und } m\sqrt{\frac{8r^2 - 4a^2}{1 + m^2}}.$$

65. Den Inhalt F eines Kreisausschnitts vom Radius r zu finden, wenn der Centriwinkel a° enthält.

Antwort. Man erhält $F = \frac{ar^2\pi}{360}$.

Beispiel. Wenn $a = 32^\circ\, 11'\, 28''$ erhält man $F = 0{,}28092 \cdot r^2$.

66. Der Inhalt eines Kreisausschnittes sei F, der Bogen = a, wie groß ist der Halbmesser des zugehörigen Kreises?

Antwort. $r = \frac{2F}{a}$.

67. Den Mittelpunktswinkel des Kreisausschnitts zu bestimmen, für welchen der Umfang dem Umfange des Kreises selbst gleich ist.

Antwort. $245^\circ\ 24'\ 30''$.

68. Wie groß ist aber der Winkel, wenn der Umfang des Ausschnittes der halben Peripherie gleich sein soll?

Antwort. $65^\circ\ 24'\ 36,$..

69. Wie viel Grade enthält der Winkel, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist?

Antwort. 57° 17′ 44″,8...

70. Wie groß ist die Breite der concentrischen Ringfläche, wenn ihr Inhalt = F sein soll?

Antwort. Wenn r den Radius des innern Kreises bezeichnet,

so ist $x = -r + \sqrt{\frac{F + r^2\pi}{\pi}}$.

71. Wenn aber die Breite = b und F der Inhalt des Ringes ist, wie heißen die beiden Radien?

Antwort. $\frac{F}{2b\pi} + \frac{b}{2}$ und $\frac{F}{2b\pi} - \frac{b}{2}$.

72. Wenn a, b, c, d die Seiten eines Vierecks im Kreise bezeichnen, den Inhalt F desselben zu bestimmen.

Antwort. Man erhält F =

$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$,

oder wenn $\frac{a+b+c+d}{2}$ mit H bezeichnet wird:

$$F = \sqrt{(H-d)(H-c)(H-b)(H-a)}.$$

73. Den Radius r des umbeschriebenen Kreises eines Vierecks, dessen Seiten a, b, c, d sind, zu finden.

Antwort. Man erhält $r = \frac{1}{4F}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$.

74. Wenn das Viereck im Kreise zugleich centrisch nach den Seiten ist, den Inhalt desselben zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $F = \sqrt{abcd}$.

75. Aus der Seite a des regulären n Ecks im Kreise die Seite des regulären 2 n Ecks zu finden.

Antwort. Man erhält $x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$ und umgekehrt $a = x\sqrt{4 - x^2}$ für den Radius = 1.

76. Aus der Seite a des einbeschriebenen regulären n Ecks die Seite des umbeschriebenen n Ecks zu finden.

Antwort. Man findet $x = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}$.

77. Aus dem Radius r die Seiten der regulären einbeschriebenen Vielecke zu finden.

Antwort. Für das Dreieck findet man $x = r\sqrt{3}$;

" " Viereck " " $x = r\sqrt{2}$;

" " Fünfeck " " $x = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$;

" " Sechseck " " $x = r$;

" " Achteck " " $x = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

" " Zehneck " " $x = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$.

78. Aus dem Radius r den Inhalt F der regulären einbeschriebenen Vielecke zu finden.

Antwort. Man findet für das Dreieck: $F = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$;

" " " " Viereck: $F = 2r^2$;

" " " " Fünfeck: $F = \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

" " " " Sechseck: $F = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$;

" " " " Achteck: $F = 2r^2\sqrt{2}$;

" " " " Zehneck: $F = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

79. Die Seite des regulären dem Kreise umbeschriebenen Zwölfecks ist doppelt so groß, als die Seite des einbeschriebenen regulären Zwölfecks.

80. Die Seite des regulären einbeschriebenen Fünfzehnecks ist für den Radius r

$$x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}.$$

81. Bezeichnet man den Inhalt des einbeschriebenen Vielecks von n Seiten mit E, das von 2 n Seiten mit E', den Inhalt des umbeschriebenen n Ecks mit U, den des umbeschriebenen 2 n Ecks mit U', so ist

$$E' = \sqrt{EU};$$

$$U' = \frac{2EU}{E + E'}.$$

82. Aus den vier Seiten eines Trapezes die Diagonalen zu bestimmen.

Antwort. Wenn a und c die nicht parallelen, b und d die parallelen Seiten, f die Diagonale, welche mit a und d aus einerlei Ecke und e die, welche mit c und d aus einerlei Ecke ausläuft, bezeichnen, so ist

$$e^2 = \frac{(d - b)(a^2 + d^2) - d\Big((d - b)^2 + (a^2 - c^2)\Big)}{d - b},$$

$$f^2 = \frac{(d - b)(c^2 + d^2) - d\Big((d - b)^2 - (a^2 - c^2)\Big)}{d - b}.$$

83. Den Flächeninhalt eines jeden Polygons zu bestimmen.

Auflösung. Es sei (Fig. 185) das Achteck ABCDEFGH gegeben. Man nehme eine Seite desselben als Grundlinie an, z. B. AH, und fälle aus den Ecken B, C, D, E, F, G auf dieselbe die Lothe y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 und bezeichne die Entfernungen der Fußpunkte dieser Lothe in der Linie AH von dem Anfangspunkt A mit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 und die Länge AH mit x_7, so findet man die Fläche F des Achtecks ausgedrückt durch F =

$$\tfrac{1}{2}(y_1x_2 + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_5 - x_3) + y_5(x_6 - x_4) + y_6(x_7 - x_5)).$$

Es ist nicht nöthig, daß man eine Seite des Vielecks als Grundlinie annimmt; denn man kann die Lothe sehr leicht auf irgend eine beliebig gezogene Gerade beziehen und ebenso den in letzterer liegenden Punkt, aus welchem die Fußpunkte der Lothe gemessen werden, beliebig annehmen.

Man erhält dann für ein n Eck F =

$$\frac{1}{2}\Big(y_{,}(x_2-x_n)+y_2(x_3-x_{,})+y_3(x_4-x_2)\ldots\ldots+y_n(x_{,}-x)_{n-1}\Big).$$

II.

Goniometrie und Trigonometrie.

§. 1.

1. Wie heißen die vorzüglichsten goniometrischen Functionen?

2. Warum nennt man dieselben auch goniometrische oder trigonometrische Linien?

3. Welche Relation besteht zwischen Cosinus und Sinus, zwischen Tangens und Cotangens eines spitzen Winkels?

4. Wenn $\alpha + \beta < 90$, so ist immer Sin. $(\alpha + \beta) =$ Cos. $\Big((90 - \alpha) - \beta\Big)$; für welchen Winkel ist daher der Cosinus dem Sin. $(60 + \alpha)$ gleich?

5. In der Gleichung Cos. $(24 + \alpha) =$ Sin. x; Cos. $(36 - \alpha) =$ Sin. x; Tang. $(45 \pm \alpha) =$ Cotang. x; Cosec. x = Sec. $(54 \mp \alpha)$ statt x seinen wahren Werth zu setzen.

6. Wenn a der Werth einer trigonometrischen Function des Winkels x ist, wie heißt die Gleichung, in welcher x von seinem Functionszeichen befreit ist?

Antwort. Wenn z. B. Sin. x = a, so ist x = arc Sin. a; $\Big($x = arc (Sin. = a)$\Big)$ u. s. w.

7. Wie lassen sich die trigonometrischen Functionen auf Winkel ausdehnen, deren Bogen im zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen?

8. Die Relationen aufzustellen, welche zwischen den verschiedenen goniometrischen Functionen eines und desselben Winkels stattfinden.

9. Wenn Cotang. $x = 2$, wie viel ist Sin. x? —

Antwort. Sin. $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Wenn $x = 26^\circ\ 33'\ 54'',2$ gefunden ist, welcher Winkel genügt der Gleichung $x = \text{arc}\left(\text{Sin.} = \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ noch?

10. Wenn Tang. $x = \frac{5}{12}$, durch welche Zahlen werden die übrigen Functionen ausgedrückt?

Antwort. Sin. $x = \frac{5}{13}$, Cos. $x = \frac{12}{13}$, Cotang. $x = 2\frac{2}{5}$, Sec. $x = 1\frac{1}{12}$, Cosec. $x = 2\frac{3}{5}$.

11. Wenn Sec. $\alpha = \sqrt{1 + \text{Tang.}^2\,\alpha}$, welches Vorzeichen muß genommen werden, wenn $\alpha = 171^\circ\ 19'$ ist?

12. Wenn Sin. $\beta = \frac{\text{Tang.}\ \alpha}{1 + \text{Tang.}\ \alpha}$, welche Relation besteht dann zwischen Tang. β und Cosec. α?

Antwort. Es ist Tang. $\beta = \frac{1}{\sqrt{\text{Cosec.}\,\alpha^2 - 1} + 2\sqrt{\text{Cosec.}\,\alpha^2 - 1}}$.

13. Wenn Sin. x + Cosin. $x = a$ ist, wie viel ist dann Tang. x + Cotang. x und Sec. x + Cosec. x?

Antwort. Es ist Tang. x + Cotang. $x = \frac{2}{a^2 - 1}$, Sec. x + Cosec. $x = \frac{2a}{a^2 - 1}$.

---

14. Wie viel ist Sin. $(n\pi \pm a)$, Cos. $(n\pi \pm a)$, Tang. $(n\pi \pm a)$, Cotang. $(n\pi \pm a)$, wenn n eine ganze Zahl und π den halben Umfang eines Kreises vom Halbmesser 1 bezeichnet?

Antwort. $\pm$ Sin. a. $(-1)^n$; Cos. a. $(-1)^n$; $\pm$ Tang. a; $\pm$ Cotang. a.

15. Wie ändern sich dieselben Größen, wenn $\frac{\pi}{2}$ statt π gesetzt wird?

Antwort. Für ein gerades n gelten die vorstehenden Werthe; für ein ungerades n ist aber, wenn n = 2m + 1 gesetzt wird:

$$\text{Sin.} \left((2m+1)\frac{\pi}{2} \pm a\right) = (-1)^m \text{ Cos. } a;$$

$$\text{Cos.} \left((2m+1)\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \text{ Sin. } \alpha\, (-1)^m;$$

$$\text{Tang.} \left((2m+1)\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \text{ Cotang. } a;$$

$$\text{Cotang.} \left((2m+1)\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \text{ Tang. } a.$$

Unter diesen sind hauptsächlich bemerkenswerth:

$$\text{Sin.} \left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \text{Cos. } a;$$

$$\text{Cos.} \left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \text{ Sin. } a;$$

$$\text{Tang.} \left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \text{ Cotang. } a;$$

$$\text{Cotang.} \left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \text{ Tang. } a.$$

$$\text{Sin.} \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{Sin.} \left(\frac{\pi}{2} - a\right);$$

$$\text{Cos.} \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = - \text{ Cos.} \left(\frac{\pi}{2} - a\right);$$

$$\text{Tang.} \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = - \text{ Tang.} \left(\frac{\pi}{2} - a\right);$$

$$\text{Cotang.} \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = - \text{ Cotang.} \left(\frac{\pi}{2} - a\right).$$

16. Welchen Sinn hat ein negativer Bogen oder Winkel, und welche Gleichungen finden für die einzelnen Functionen positiver und negativer gleicher Winkel statt?

17. Wie kann man in Nr. 15 aus den für das obere Zeichen geltenden Gleichungen die entsprechenden für das untere Zeichen ableiten.

18. Den spitzen Winkel x zu finden, welcher den Gleichungen entspricht:

$$\text{Sin. } x = \text{Sin. } (128^\circ\ 29'); \quad \text{Cos. } x = \text{Cos. } (-238^\circ\ 17');$$
$$\text{Sin. } x = \text{Cos. } 132^\circ; \quad \text{Cos. } x = \text{Sin. } (213^\circ\ 18');$$
$$\text{Tang. } x = \text{Tang.} (2\pi - 0{,}36); \text{Cotang. } x = \text{Tang. } 174^\circ\ 16'.$$

§. 2.

I. $$\text{Sin. } (a \pm b) = \text{Sin. } a \text{ Cos. } b \pm \text{Cos. } a \text{ Sin. } b.$$

II. $$\text{Cos. } (a \pm b) = \text{Cos. } a \text{ Cos. } b \mp \text{Sin. } a \text{ Sin. } b.$$

III. $$\text{Tang. } (a \pm b) = \frac{\text{Tang. } a \pm \text{Tang. } b}{1 \mp \text{Tang. } a \text{ Tang. } b} = \frac{\text{Cotang. } b \pm \text{Cotang. } a}{\text{Cotang. } a \text{ Cotang. } b \mp 1} = \frac{1}{\text{Cotang. } (a \pm b)}.$$

IV. $$\text{Cotang. } (a \pm b) = \frac{\text{Cotang. } a \mp \text{Tang. } b}{1 \pm \text{Cotang. } a \text{ Tang. } b}.$$

1. Wie ändern sich vorstehende Relationen um, wenn $a = 45^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ u. s. w. gesetzt wird. Vergl. §. 1. 4.

2. Welche Relationen erhält man, wenn $b = a$ gesetzt wird?

3) Wie läßt sich hieraus der Werth von Sin. 45, Cos. 45, Tang. 45, Cotang. 45, dann dieselben Functionen für die Winkel von 30, 36, 18 und für ihre Hälften u. s. w. bestimmen?

Antwort. $$\left.\begin{array}{l}\text{Sin. } 45\\ \text{Cos. } 45\end{array}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{Sin. } 30 = \tfrac{1}{2}; \quad \text{Cos. } 30 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{Sin. } 36 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}; \quad \text{Sin. } 18 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4};$$

$$\text{Cos. } 36 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}; \quad \text{Cos. } 18 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4}.$$

4. Es läßt sich jede Summe oder Differenz von der Form:

$1 \pm \text{Sin. } a$, $1 \pm \text{Cos. } a$, $\text{Sin. } a \pm \text{Cos. } a$, $1 \pm \text{Tang. } a$, $1 \pm \text{Cotang. } a$, $1 - \text{Tang. } a^2$, $1 - \text{Cotang. } a^2$ durch ein Produkt oder einen Quotienten ausdrücken.

Antwort. Man erhält:

$$\left.\begin{matrix} 2\,\text{Sin.}\,(45 + \tfrac{1}{2}a)^2 \\ 2\,\text{Sin.}\,(45 - \tfrac{1}{2}a)^2 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} 2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}a^2 \\ 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a^2 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} \sqrt{2}\,\text{Sin.}\,(45+a) \\ -\sqrt{2}\,\text{Sin.}\,(45-a) \end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\sqrt{2}\,\text{Sin.}\,(45+a)}{\text{Cos. } a} \\ \dfrac{\sqrt{2}\,\text{Sin.}\,(45-a)}{\text{Cos. } a} \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} \dfrac{\sqrt{2}\,\text{Sin.}\,(45+a)}{\text{Sin. } a} \\ \dfrac{\sqrt{2}\,\text{Sin.}\,(45-a)}{\text{Sin. } a} \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \dfrac{\text{Cos. } 2a}{\text{Cos. } a^2} \\ -\dfrac{\text{Cos. } 2a}{\text{Sin. } a^2} \end{matrix}\right\}.$$

Denn weil $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{Sin. } 45° = \text{Cos. } 45°$, so multiplicire und dividire man die gegebenen Summen oder Differenzen mit $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (Die Tangenten und Cotangenten müssen zuvor durch Sin. und Cos. ausgedrückt werden.)

5. Es läßt sich jede Summe oder Differenz von der Form:

$\text{Sin. } a \pm \text{Sin. } b$; $\text{Cos. } a \pm \text{Cos. } b$; $\text{Tang. } a \pm \text{Tang. } b$; $\text{Cotang. } a \pm \text{Cotang. } b$; $\text{Tang. } a \pm \text{Cotang. } b$; $\text{Sin. } a^2 - \text{Sin. } b^2$; $\text{Cos. } a^2 - \text{Cos. } b^2$; $\text{Cos. } a^2 - \text{Sin. } b^2$ durch ein Produkt oder einen Quotienten ausdrücken.

Antwort. Man erhält:

$$\left.\begin{matrix} 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(a-b) \\ 2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(a-b) \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} 2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(a-b) \\ -2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(a-b) \end{matrix}\right\};$$

$$\frac{\text{Sin. }(a \pm b)}{\text{Cos. } a\ \text{Cos. } b};\ -\frac{\text{Sin. }(a \pm b)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } b};\ \pm\frac{\text{Cos. }(a \mp b)}{\text{Cos. } a\ \text{Sin. } b};$$

$$\text{Sin. } a^2 - \text{Sin. } b^2 = \text{Cos. } b^2 - \text{Cos. } a^2 = \text{Sin. }(a+b)\ \text{Sin. }(a-b);$$

$$\text{Cos. } a^2 - \text{Sin. } b^2 = \text{Cos. }(a+b)\ \text{Cos. }(a-b).$$

6. Welche Relationen erhält man, wenn in den Formeln I, II, III, IV 2a, 3a u. s. w. statt b gesetzt wird?

Antwort. Man erhält:

$$\text{Sin.}\,3a = 3\,\text{Sin.}\,a - 4\,\text{Sin.}^3 a = (4\,\text{Cos.}^2 a - 1)\sqrt{1-\text{Cos.}^2 a};$$

$$\text{Cos.}\,3a = 4\,\text{Cos.}^3 a - 3\,\text{Cos.}\,a = (1-4\,\text{Sin.}^2 a)\sqrt{1-\text{Sin.}^2 a};$$

$$\text{Tang.}\,3a = \frac{3\,\text{Tang.}\,a - \text{Tang.}^3 a}{1 - 3\,\text{Tang.}^2 a};$$

$$\text{Cotang.}\,3a = \frac{3\,\text{Cotang.}^2 a - 1}{\text{Cotang.}^3 a - 3\,\text{Cotang.}\,a}.$$

7. Welche Relationen erhält man, wenn allgemein $b + c$ statt b in den Formeln I, II, III, IV gesetzt wird?

8. Außer den durch vorhergehende Substitution erhaltenen Relationen finden noch folgende statt:

$$\text{Sin.}\,(a-b)\,\text{Sin.}\,c + \text{Sin.}\,(b-c)\,\text{Sin.}\,a + \text{Sin.}\,(c-a)\,\text{Sin.}\,b = o;$$

$$\text{Sin.}\,(a-b)\,\text{Cos.}\,c + \text{Sin.}\,(b-c)\,\text{Cos.}\,a + \text{Sin.}\,(c-a)\,\text{Cos.}\,b = o;$$

$$\text{Sin.}\,(a+b)\,\text{Sin.}\,c - \text{Sin.}\,(b+c)\,\text{Sin.}\,a - \text{Sin.}\,(c-a)\,\text{Sin.}\,b = o;$$

$$\text{Sin.}\,(a+b)\,\text{Cos.}\,c - \text{Sin.}\,(b+c)\,\text{Cos.}\,a + \text{Sin.}\,(c-a)\,\text{Cos.}\,b = o;$$

$$\text{Cos.}\,(a-b)\,\text{Sin.}\,c - \text{Cos.}\,(b-c)\,\text{Sin.}\,a - \text{Sin.}\,(c-a)\,\text{Cos.}\,b = o;$$

$$\text{Cos.}\,(a-b)\,\text{Sin.}\,c - \text{Cos.}\,(b-c)\,\text{Sin.}\,a - \text{Sin.}\,(c-a)\,\text{Cos.}\,b = o;$$

$$\text{Sin.}\,(a+b+c) - \text{Sin.}\,(a+b-c) - \text{Sin.}\,(a-b+c) + \text{Sin.}\,(a-b-c) = -4\,\text{Sin.}\,a\,\text{Sin.}\,b\,\text{Sin.}\,c;$$

$$\text{Sin.}\,(b+c-a) + \text{Sin.}\,(a+c-b) + \text{Sin.}\,(a+b-c) - \text{Sin.}\,(a+b+c) = 4\,\text{Sin.}\,a\,\text{Sin.}\,b\,\text{Sin.}\,c;$$

$$\text{Cos.}\,(a+b+c) + \text{Cos.}\,(a+b-c) + \text{Cos.}\,(a-b+c) + \text{Cos.}\,(a-b-c) = 4\,\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b\,\text{Cos.}\,c;$$

$$\text{Cos.}\,(a+b+c) + \text{Cos.}\,(a+b-c) + \text{Cos.}\,(a+c-b) + \text{Cos.}\,(b+c-a) = 4\,\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b\,\text{Cos.}\,c.$$

$$\text{Sin.}\,a + \text{Sin.}\,b + \text{Sin.}\,c = 4\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+c)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(b+c) + \text{Sin.}\,(a+b+c);$$

$$\text{Cos.}\,a + \text{Cos.}\,b + \text{Cos.}\,c = 4\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(a+c)\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(b+c) - \text{Cos.}\,(a+b+c);$$

$$\text{Tang.}\,a + \text{Tang.}\,b + \text{Tang.}\,c = \text{Tang.}\,a\,\text{Tang.}\,b\,\text{Tang.}\,c + \frac{\text{Sin.}\,(a+b+c)}{\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b\,\text{Cos.}\,c};$$

$$\text{Cotang. } a + \text{Cotang. } b + \text{Cotang. } c =$$
$$\text{Cotang. } a \text{ Cotang. } b \text{ Cotang. } c - \frac{\text{Cos. } (a+b+c)}{\text{Sin. } a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c}.$$

$$1 - \text{Cos. }^2a - \text{Cos. }^2b - \text{Cos. }^2c + 2\,\text{Cos. } a \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c =$$
$$4\text{Sin. }\tfrac{1}{2}(a+b+c)\text{ Sin. }\tfrac{1}{2}(b+c-a)\text{ Sin. }\tfrac{1}{2}(a+c-b)\text{Sin. }\tfrac{1}{2}(a+b-c);$$
$$-1 + \text{Cos. }^2a + \text{Cos. }^2b + \text{Cos. }^2c + 2\,\text{Cos. } a \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c =$$
$$4\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(a+b+c)\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(b+c-a)\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(a+c-b)\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(a+b-c);$$
$$1 + \text{Cos. }^2a - \text{Cos. }^2b - \text{Cos. }^2c + 2\,\text{Cos. } a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c =$$
$$4\text{Sin. }\tfrac{1}{2}(a+b+c)\text{Sin. }\tfrac{1}{2}(b+c-a)\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(a+c-b)\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(a+b-c);$$
$$-1 - \text{Cos. } a^2 + \text{Cos. } b^2 + \text{Cos. } c^2 + 2\text{ Cos. } a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c =$$
$$4\,\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(a+b+c)\text{Cos. }\tfrac{1}{2}(b+c-a)\text{Sin. }\tfrac{1}{2}(a+c-b)\text{Sin. }\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

Wenn a, b, c, d vier beliebige Winkel sind, so bestehen folgende Relationen:

$$S.(a-b)\,S.c\,S.d + S.(b-c)\,S.a\,S.d + S.(c-d)\,S.a\,S.b + S.(d-a)\,S.b\,S.c = o;$$
$$S.(a-b)\,C.c\,C.d + S.(b-c)\,C.a\,C.d + S.(c-d)\,C.a\,C.b + S.(d-a)\,C.b\,C.c = o.$$

Diese Formeln können leicht auf mehr als 4 Winkel ausgedehnt werden.

10. Wenn die Summe der drei Winkel a, b, c 180° beträgt, so ist immer:

1) $\text{Sin. } a + \text{Sin. } b + \text{Sin. } c = 4\,\text{Cos. }\tfrac{1}{2}a \text{ Cos. }\tfrac{1}{2}b \text{ Cos. }\tfrac{1}{2}c;$
2) $\text{Sin. } a + \text{Sin. } b - \text{Sin. } c = 4\,\text{Sin. }\tfrac{1}{2}a \text{ Sin. }\tfrac{1}{2}b \text{ Cos. }\tfrac{1}{2}c;$
3) $\text{Cos. } a + \text{Cos. } b + \text{Cos. } c = 1 + 4\text{ Sin. }\tfrac{1}{2}a \text{ Sin. }\tfrac{1}{2}b \text{ Sin. }\tfrac{1}{2}c;$
4) $\text{Cos. } a + \text{Cos. } b - \text{Cos. } c = -1 + 4\,\text{Cos }\tfrac{1}{2}a \text{ Cos. }\tfrac{1}{2}b \text{ Sin. }\tfrac{1}{2}c;$
5) $\text{Sin. } 2a + \text{Sin. } 2b + \text{Sin. } 2c = 4\text{ Sin. } a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c;$
6) $\text{Sin. } 2a + \text{Sin. } 2b - \text{Sin. } 2c = 4\text{Sin. } c \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b;$
7) $\text{Cos. } 2a + \text{Cos. } 2b + \text{Cos. } 2c = -(1 + 4\text{ Cos. } a \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c);$
8) $\text{Cos. } 2a + \text{Cos. } 2b - \text{Cos. } 2c = 1 + 4\text{Sin. } a \text{ Sin. } b \text{ Cos. } c;$
9) $\text{Cos. } a^2 + \text{Cos. } b^2 + \text{Cos. } c^2 = 1 - 2\text{ Cos. } a \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c;$
10) $\text{Tang. } a + \text{Tang. } b + \text{Tang. } c = \text{Tang. } a \text{ Tang. } b \text{ Tang. } c;$
11) $\text{Cotang. } a + \text{Cotang. } b + \text{Cotang. } c =$
$\text{Cotang. } a \text{ Cotang. } b \text{ Cotang. } c + \text{Cosec. } a \text{ Cosec. } b \text{ Cosec. } c;$
12) $\text{Tg. }\frac{a}{2}\text{ Tg. }\frac{b}{2} + \text{Tg. }\frac{a}{2}\text{ Tg. }\frac{c}{2} + \text{Tg. }\frac{b}{2}\text{ Tg. }\frac{c}{2} = 1;$
13) $\text{Cotg. }\frac{a}{2} + \text{Cotg. }\frac{b}{2} + \text{Cotg. }\frac{c}{2} = \text{Cotg. }\frac{a}{2}\text{ Cotg. }\frac{b}{2}\text{ Cotg. }\frac{c}{2}.$

11. Wenn mehrere Winkel eine arithmetische Progression bilden, so läßt sich die Summe ihrer Sinus und Cosinus bestimmen. Es ist nemlich

1) $S.a + S.(a+b) + S.(a+2b) + \ldots + S.\big(a+(m-1)b\big) + S.(a+mb)$

$$= \frac{\text{Sin.}\,\frac{m+1}{2}\,b\ \text{Sin.}\,(a + \frac{m}{2}\,b)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,b}.$$

2) $C.a + C.(a+b) + C.(a+2b) + \ldots + C.\big(a+(m-1)b\big) + C.(a+mb)$

$$= \frac{\text{Sin.}\,\frac{m+1}{2}\,b\ \text{Cos.}\,(a + \frac{m}{2}\,b)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,b}.$$

ad 1) Man setze in $\text{Cos.}\,(x - y) - \text{Cos.}\,(x + y) = 2\,\text{Sin.}\,x\,\text{Sin.}\,y$ statt x das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe, nemlich $x = a + nb$ und $y = b$, so erhält man $\text{Cos.}\big(a + (n-1)\,b\big) - \text{Cos.}\big(a + (n+1)\,b\big)$

$= 2\,\text{Sin.}\,(a + nb)\,\text{Sin.}\,b$, und wenn $\frac{b}{2}$ statt b und 2m statt n gesetzt wird, so erhält man

$$\text{Cos.}\left(a + \frac{(2m-1)}{2}\,b\right) - \text{Cos.}\left(a + \frac{2m+1}{2}\,b\right)$$
$$= 2\,\text{Sin.}\,(a + mb)\,\text{Sin.}\,\frac{b}{2}.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt m nach einander die Werthe 0, 1, 2,... m und addirt sämmtliche Gleichungen, so erhält man

$$\text{Sin.}\,a + \text{Sin.}\,(a+b) + \text{Sin.}\,(a+2b) + \ldots + \text{Sin.}\,(a+mb)$$
$$= \frac{\text{Cos.}\left(a - \frac{b}{2}\right) - \text{Cos.}\left(a + \frac{(2m+1)}{2}\,b\right)}{2\,\text{Sin.}\,\frac{b}{2}},$$

woraus obige Summenformel sogleich folgt.

ad 2) Legt man auf ähnliche Weise die Gleichung

$$\text{Sin.}\,(x + y) - \text{Sin.}\,(x - y) = 2\,\text{Cos.}\,x\,\text{Sin.}\,y$$

zu Grunde, so erhält man durch ein ähnliches Verfahren die Summe der zweiten Reihe.

12. Welches ist der Werth der Reihe

$$\mathrm{Sin.}\ \varphi + \mathrm{Sin.}\ 2\varphi + \ldots + \mathrm{Sin.}\ (n-1)\ \varphi,$$

wenn $\varphi = \frac{360}{n}$ ist? —

Antwort. 0.

13. Wenn aber $\frac{180}{n} = \varphi$ ist, welches ist dann der Werth derselben Reihe?

Antwort. $\mathrm{Cotang.}\ \frac{1}{2}\varphi$.

14. Wenn der Umfang eines Kreises in n gleiche Theile getheilt wird, und $\frac{360}{n} = \varphi$ gesetzt wird, welches ist der Werth der Reihe

$$\mathrm{Cos.}\ \varphi + \mathrm{Cos.}\ 2\varphi + \ldots + \mathrm{Cos.}\ n\varphi? —$$

Antwort. 0.

15. Die Reihe $\mathrm{Sin.}\ a - \mathrm{Sin.}\ 3a + \mathrm{Sin.}\ 5a \ldots\ldots + \mathrm{Sin.}\ (4m+1)\ a$ zu summiren?

Antwort. Die Summe beträgt $\frac{\mathrm{Sin.}\ (4m+2)\ a}{2\ \mathrm{Cos.}\ a}$.

Die Summe der Reihe

$\mathrm{Sin.}\ a - \mathrm{Sin.}\ 3a + \mathrm{Sin.}\ 5a \ldots\ldots - \mathrm{Sin.}\ (4m-1)\ a$ ist $-\frac{\mathrm{Sin.}\ 4ma}{2\ \mathrm{Cos.}\ a}$.

16. Wenn $\varphi = \frac{\pi}{2n+1}$, so ist

$$\mathrm{Cos.}\ \varphi - \mathrm{Cos.}\ 2\varphi + \mathrm{Cos.}\ 3\varphi \ldots\ldots \pm \mathrm{Cos.}\ n\varphi = \tfrac{1}{2}.$$

17. Unter gleicher Voraussetzung ist

$$\mathrm{Cos.}\ \varphi + \mathrm{Cos.}\ 3\varphi + \mathrm{Cos.}\ 5\varphi + \ldots + \mathrm{Cos.}\ (2n-1)\ \varphi = \tfrac{1}{2};$$

$$\mathrm{Cos.}\ 2\varphi + \mathrm{Cos.}\ 4\varphi + \mathrm{Cos.}\ 6\varphi + \ldots + \mathrm{Cos}\ 2n\varphi = -\tfrac{1}{2}.$$

In welchem Zusammenhange stehen diese beiden Reihen mit der in Nr. 16 angegebenen?

18. Überhaupt ist

$$\text{Cos. } a - \text{Cos. } 3a + \text{Cos. } 5a - \ldots - \text{Cos. } (4m-1)a = \frac{\text{Sin.}^2\, 2ma}{\text{Cos. } a};$$

$$\text{Cos. } a - \text{Cos. } 3a + \text{Cos. } 5a - \ldots + \text{Cos. } (4m+1)a = \frac{\text{Cos.}^2\, (2m+1)a}{\text{Cos. } a}.$$

19. Die Reihe

$$\text{Sec.} a \,\text{Sec.} 2a + \text{Sec.} 2a \,\text{Sec.} 3a + \text{Sec.} 3a \,\text{Sec.} 4a + \ldots + \text{Sec.}(m-1)a \,\text{Sec.} ma = \frac{\text{Sin. } (m-1)a}{\text{Sin. } a}$$

folgt sogleich aus s. Ebenso lassen sich ähnliche Reihen für die Cosecanten summiren.

20. Es ist $\text{Cosec.} a + \text{Cosec.} 2a + \text{Cosec.} 4a + \ldots + \text{Cosec.} 2^{n-1}a = \text{Cotang.} \frac{1}{2}a - \text{Cotang. } 2^{n-1}a$, weil $\text{Cotang.} \frac{1}{2}a - \text{Cotang. } a = \text{Cosec. } a$.

21. Auch ist

$$\tfrac{1}{2}\text{Tang. } \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4}\text{Tang. } \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}\text{Tang. } \tfrac{1}{8}a + \ldots + \frac{1}{2^n}\text{Tang.} \frac{1}{2^n}a$$

$$= \frac{1}{2^n}\text{Cotang.} \frac{a}{2^n} - \text{Cotang. } a,$$

weil $\frac{1}{2}\text{Cotang. } \frac{1}{2}a - \text{Cotang. } a = \frac{1}{2}\text{Tang. } \frac{1}{2}a$ ist.

§. 3.

1. Für welche Winkel läßt sich überhaupt jede trigonometrische Function leicht berechnen?

2. Welche Gleichung ist aufzulösen, um den Werth von Sin. 48°, Tang. 72 u. s. w. zu erhalten?

3. Durch welche Relation erhält man aus den bekannten Werthen des Sinus eines Winkels den Cosinus des zweifachen?

4. Aus den bekannten Werthen des Sinus und Cosinus von 45° und 36° den Sinus von 81° zu finden.

Man erhält $\text{Sin. } 81° = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$.

5. Kennt man die Tangenten der Winkel von 0° bis 30°, so kann man die Tangenten der übrigen Winkel durch einfache Subtraktion finden.

Denn wenn φ ein Winkel und kleiner als 30° ist, so ist Tang. $(60 + \varphi)$ — Tang. $(30 - \varphi) = 2$ Tang. $(30 + 2\varphi)$, weil 2 Cotang. 2a = Cotang. a — Tang. a ist.

Kennt man die Tangenten bis 45°, so kann man die übrigen durch Addition finden; denn es ist Tang. $(45 + \frac{1}{2}\varphi) =$ 2 Tang. φ + Tang. $(45 - \frac{1}{2}\varphi)$.

6. Wenn α und β die Werthe von Sin. φ und Cos. φ sind, so läßt sich aus ihnen Sin. $\frac{1}{2^n}\varphi$ und Cos. $\frac{1}{2^n}\varphi$ finden. Denn es ist

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - 4\alpha^2}};$$

$$\text{Sin.}\ \frac{1}{2^2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{4 - 4\alpha^2}}};$$

$$\text{Sin.}\ \frac{1}{2^3}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - 4a^2}}}}\ \text{u. s. w. und}$$

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\beta};$$

$$\text{Cos.}\ \frac{1}{2^2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\beta}};$$

$$\text{Cos.}\ \frac{1}{2^3}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\beta}}};$$

7. Wie läßt sich hieraus die Seite des einem Kreise einbeschriebenen regulären 128 Ecks bestimmen?

Es ist dieselbe $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$.

8. Für jeden Bogen zwischen 0 und 90 ist der Unterschied zwischen dem Bogen und dem zugehörigen Sinus kleiner als der vierte Theil des Cubus vom Bogen.

Denn es ist Sin. a = 2 Sin. $\frac{1}{2}$ a Cos. $\frac{1}{2}$ a und Tang. a > Arc. a,

folglich Sin. $\frac{a}{2}$ > Arc. $\frac{a}{2}$ Cos. $\frac{a}{2}$, also auch

$$\text{Sin. } a > 2 \text{ Arc. } \frac{a}{2} \text{ Cos. }^2 \frac{a}{2}, \text{ folglich}$$

$$\text{Arc. } a - \text{Sin. } a < \text{Arc. } a \text{ Sin. }^2 \frac{a}{2}; \text{ weil aber}$$

$$\text{Sin. } \frac{a}{2} < \text{Arc. } \frac{a}{2} \text{ oder Sin. }^2 \frac{a}{2} < \frac{\text{Arc. }^2 a}{4}, \text{ so folgt}$$

$$\text{Arc. } a - \text{Sin. } a < \frac{\text{Arc. }^3 a}{4}.$$

Mittelst dieses Satzes lassen sich leicht die Sinus beliebig kleiner Winkel berechnen, wenn man statt ihrer die zugehörigen Bogen rechnet und untersucht, ob die Größe $\frac{\text{Arc. } a^3}{4}$ noch auf diejenigen Dezimalstellen Einfluß hat, für welche man überhaupt die Sinustafeln rechnen will. Man findet z. B.

$$\text{Arc. } 10'' = 0{,}0000484813681 \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{4} \text{ Arc. }^3 10'' = 0{,}00000000000032.$$

Man kann daher offenbar Sin. $10'' = 0{,}000048481368$ setzen. Mit diesem Werthe können dann z. B. die Sinus der Winkel von 10 zu 10 Secunden gerechnet werden.

Ebenso ist die Differenz zwischen der Einheit und dem Cosinus immer kleiner als die Hälfte des Quadrats des zugehörigen Bogens.

Denn es ist $1 - \text{Cos. } a = 2 \text{ Sin. }^2 \frac{a}{2}$. Da aber

$$\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2} a < \frac{\text{Arc. }^2 a}{4}, \text{ so folgt}$$

$$1 - \text{Cos. } a < \frac{\text{Arc. }^2 a}{2}.$$

§. 4.

Auflösung trigonometrischer Gleichungen.

1. Den Winkel x aus der Gleichung

$$\text{Sin. } x = \tfrac{7}{8} \text{ Cos. } x$$

zu bestimmen.

Antwort. $x = 41^\circ\ 11'\ 9'',32$ oder $x = 221^\circ\ 11'\ 9'',32$.

2. Die Gleichung 0,718 Sin. x = — 0,3 Cos. x aufzulösen.

Antwort. Man erhält x = 157° 19′ 24″,58 und x = 337° 19′ 24″,58.

3. Die Gleichung a Sin. $(\alpha - \varphi)$ = b Sin. $(\alpha + \varphi)$, wenn φ unbekannt ist, aufzulösen.

Antwort. Es ist $\text{Tang. } \varphi = \frac{a - b}{a + b} \text{ Tang. } \alpha$.

Man entwickle Sin. $(\alpha - \varphi)$ und Sin. $(\alpha + \varphi)$ und dividire die Gleichung mit Cos. α Cos. φ.

4. Welche Werthe erhält φ, wenn $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 1$ und a = 104° 17′ 32″ ist?

Antwort. φ = 122° 7′ 4″,59 und φ = 302° 7′ 4″,59.

5. Die Gleichung a Sin. $(\alpha + \varphi)$ = b Cos. $(\alpha - \varphi)$ aufzulösen.

Antwort. Man erhält $\text{Tang. } \varphi = \frac{a \text{ Tang. } \alpha - b}{b \text{ Tang. } \alpha - a}$.

Setzt man a = b Tang. β, so ergibt sich $\text{Tang. } \varphi = \frac{\text{Cos, } (\beta + \alpha)}{\text{Sin. } (\beta - \alpha)}$.

Anmerkung. Zu bemerken ist, daß jede Gleichung von den angegebenen Formen unendlich viele Auflösungen zuläßt oder unendlich viele Wurzeln hat, von denen man aber gewöhnlich nur diejenigen nimmt, welche kleiner als 360° sind. Denn wenn φ = m° eine Auflösung einer solchen Gleichung, so genügen der letztern auch die Werthe (360 + m°), (2 . 360 + m°) überhaupt $2n\pi$ + m°, wenn π in Graden ausgedrückt wird.

2. Anmerkung. Wegen der leichtern logarithmischen Berechnung sucht man die in den Auflösungen vorkommenden Summen und Differenzen immer in Produkte und Quotienten zu verwandeln. Hiezu dienen die in §. 2, 4 und 5 angegebenen Formeln; sind aber mit den trigonometrischen

Functionen noch gemeine Zahlenausdrücke verbunden, so untersuche man, ob nicht die Substitution der Tangente eines Hülfswinkels, welcher letztere durch einen Quotienten der Zahlen bestimmt werden kann, zum Ziele führt. Jedoch lassen sich hierüber keine allgemeinen Regeln aufstellen.

6. Welchen Werth erhält φ in der vorigen Gleichung, wenn $\alpha = 43^\circ\ 6'\ 32''$ $a = \text{Sin.}\ \gamma$, wo $\gamma = 81^\circ\ 17'\ 56''$ und $b = \text{Tang.}\ \delta$, wo $\delta = 15^\circ\ 36'\ 47''$ ist.

Antwort. $\varphi = 138^\circ\ 22'\ 44'',8$ und $\varphi = 318^\circ\ 22'\ 44'',8$.

7. Die Gleichung $a\ \text{Cos.}\ (a + \varphi) = b\ \text{Sin.}\ (a - \varphi)$ aufzulösen.

Antwort. $\text{Tang.}\ \varphi = \dfrac{\text{Sin.}\ (\alpha - \beta)}{\text{Cos.}\ (\alpha + \beta)}$, wenn $\text{Tang.}\ \beta = \dfrac{a}{b}$ ist.

8. Die Gleichungen 1) $a\ \text{Cos.}\ (\alpha + \varphi) = b\ \text{Cos.}\ (\alpha - \varphi)$ und 2) $a\ \text{Sin.}\ (\alpha + \varphi) = b\ \text{Cos.}\ (\alpha + \varphi)$ aufzulösen.

Antwort. Man erhält 1) $\text{Tang.}\ \varphi = \dfrac{a - b}{a + b}\ \text{Cotang.}\ \alpha$.

2) $\text{Tang.}\ \varphi = \dfrac{b - a}{a + b\ \text{Tang.}\ \alpha}$ oder $= \text{Tang.}\ (\beta - \alpha)$, wo $\dfrac{b}{a} = \text{Tang.}\ \beta$ ist.

9. Den Winkel φ aus der Gleichung $\text{Sin.}\ \delta\ \text{Sin.}\ (\alpha + \varphi) = \text{Cos.}\ \delta\ \text{Cos.}\ (\alpha + \varphi)$ zu bestimmen, wenn $\delta = 36^\circ\ 19'\ 28''$ und $\alpha = 25^\circ\ 19'\ 32''$ ist.

Antwort. $\varphi = 28^\circ\ 21'$; $\varphi = 208^\circ\ 21'$.

10. Die Gleichung $m\ \text{Sin.}\ (a + x) = n\ \text{Sin.}\ (b + x)$ aufzulösen.

Antwort. Man erhält $\text{Tang.}\ x = \dfrac{m\ \text{Sin.}\ a - n\ \text{Sin.}\ b}{n\ \text{Cos.}\ b - m\ \text{Cos.}\ a}$.

Dividirt man Zähler und Nenner mit m, so erhält man

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } a - \frac{n}{m} \text{ Sin. } b}{\frac{n}{m} \text{ Cos. } b - \text{Cos. } a}.$$

Setzt man $\frac{n}{m} = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Sin. } b}$ Tang. φ, woraus sich der Hülfswinkel φ ergibt, so ist Tang. x $= \frac{\text{Sin. } b \text{ Sin. } (a - \varphi)}{\text{Cos. } a \text{ Sin. } (\varphi - b)}$.

Oder: Man setze $a + x = y$, so erhält man statt der gegebenen Gleichung die folgende:

$$\text{Tang. } y = \text{Tang. } (a + x) = \frac{\text{Sin. } (b - a)}{\frac{m}{n} - \text{Cos. } (b - a)}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \text{Sin. } (b - a) \text{ Cotang. } \varphi$, woraus sich der Winkel φ bestimmt, so erhält man

$$\text{Tang. } (a + x) = \frac{\text{Sin. } (b - a)}{\text{Sin. } (b - a - \varphi)}.$$

11. Welcher Werth von x genügt der vorhergehenden Gleichung, wenn $m = 5',714$; $n = 3,098$; $b = 34° 17'$; $a = 79° 30'$ ist?

Antwort. Man erhält $x = 68° 35' 35''$ und $x = 248° 35' 35''$.

12. Die Gleichung m Sin. $(a + x) =$ n Sin. $(b - x)$ aufzulösen.

Antwort. Wenn $\frac{m}{n} = \text{Cotang. } \varphi \text{ Sin. } (a + b)$ gesetzt wird,

so ist $\text{Tang. } (a + x) = \frac{\text{Sin. } (a + b - \varphi)}{\text{Sin. } \varphi \text{ Sin. } (a + b)}$.

Oder wenn $\frac{m}{n} = \frac{\text{Cos. } b}{\text{Sin. } a}$ Tang. φ gesetzt wird,

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } a \text{ Sin. } (\varphi - b)}{\text{Cos. } b \text{ Sin. } (\varphi + a)}.$$

13. Die Gleichung m Sin. $(a - x) =$ n Sin. $(b - x)$ aufzulösen.

Antwort. Setzt man $\frac{m \text{ Sin. } a}{n \text{ Cos. } b} = \text{Tang. } \varphi$, so ist

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } a \text{ Sin. } (\varphi - b)}{\text{Cos. } b \text{ Sin. } (\varphi - a)}.$$

Oder: Man setze $m = n \text{ Cotang. } \varphi \text{ Sin. } (b - a)$,

so ist $\text{Cotang. } (a - x) = \dfrac{\text{Sin. } (b - a - \varphi)}{\text{Sin. } \varphi \text{ Sin. } (b - a)}$.

14. Die Gleichung $\text{Sin. } (60° - x) = 2 \text{ Sin. } (30° - x)$ aufzulösen.

Antwort. Man erhält $x = 6° \; 12' \; 21'',7$ und $x = 186° \; 12' \; 21'',7$.

15. Den Werth von x aus der Gleichung $m \text{ Cos. } (a + x) = n \text{ Sin. } (b + x)$ zu bestimmen.

Antwort. Man setze $\dfrac{m \text{ Cos. } a}{n \text{ Cos. } b} = \text{Tang. } \varphi$, so erhält man

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a \text{ Sin. } (b - \varphi)}{\text{Cos. } b \text{ Cos. } (a - \varphi)}.$$

Oder: Man setze $\text{Tang. } \varphi = \dfrac{m}{n \text{ Cos. } (b - a)}$, so erhält man

$$\text{Tang. } (a + x) = \frac{\text{Sin. } (\varphi - b + a)}{\text{Cos. } \varphi \text{ Cos. } (b - a)}.$$

16. Wenn $m = 5$, $n = 6$, $a = 10°$ und $b = 36° \; 49' \; 1'',88$ ist, welchen Werth von x erhält man aus der vorigen Gleichung?

Antwort. $x = 13° \; 10' \; 58'',12$ und $x = 193° \; 10' \; 58'',12$.

17. Die Gleichung $m \text{ Cos. } (a + x) = n \text{ Sin. } (b - x)$ aufzulösen.

Antwort. Wenn $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\text{Cos. } b}{\text{Cos. } a} \text{ Tang. } \varphi$, so ist

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a \text{ Sin. } (b - \varphi)}{\text{Cos. } b \text{ Cos. } (a + \varphi)}.$$

Oder: Wenn $\text{Tang. } \varphi = \dfrac{m}{n \text{ Cos. } (a + b)}$, so ist

$$\text{Tang. } (a + x) = \frac{\text{Sin. } (a + b - \varphi)}{\text{Cos. } \varphi \text{ Cos. } (a + b)}.$$

18. Es sei in der vorhergehenden Gleichung $m = 1{,}5432$; $n = 0{,}7184$; $a = 105° \; 9' \; 32''$; $b = 68° \; 17' \; 21''$; welche Werthe ergeben sich für x?

Antwort. 138° 48′ 31″,8 und 318° 48′ 31″,8.

19. Die Gleichungen

1) $m \text{ Cos. } (a - x) = n \text{ Sin. } (b + x)$;
2) $m \text{ Cos. } (a - x) = n \text{ Sin. } (b - x)$;
3) $m \text{ Cos. } (a + x) = n \text{ Cos. } (b + x)$;
4) $m \text{ Cos. } (a + x) = n \text{ Cos. } (b - x)$;
5) $m \text{ Cos. } (a - x) = n \text{ Cos. } (b - x)$;

aufzulösen.

Antwort. ad 1) $\text{Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a \text{ Sin. } (\varphi - b)}{\text{Cos. } b \text{ Cos. } (a + \varphi)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{Cos. } b}{\text{Cos. } a} \text{Tang. } \varphi.$$

Oder: $\text{Tang. } (a - x) = \frac{\text{Sin. } (a + b - \varphi)}{\text{Cos. } \varphi \text{ Cos. } (a + b)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \text{Tang. } \varphi \text{ Cos. } (a + b).$$

ad 2) $\text{Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a \text{ Sin. } (b - \varphi)}{\text{Cos. } b \text{ Cos. } (a - \varphi)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{Cos. } b}{\text{Cos. } a} \text{Tang. } \varphi.$$

Oder: $\text{Tang. } (a - x) = \frac{\text{Cos. } (\varphi + b - a)}{\text{Sin. } \varphi \text{ Cos. } (b - a)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \text{Cotang. } \varphi \text{ Cos. } (b - a).$$

ad 3) $\text{Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a \text{ Cos. } (b + \varphi)}{\text{Sin. } b \text{ Cos. } (a + \varphi)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{Sin. } b}{\text{Cos. } a} \text{Tang. } \varphi.$$

Oder: $\text{Tang. } (a + x) = \frac{\text{Cos. } (\varphi + b - a)}{\text{Cos. } \varphi \text{ Sin. } (b - a)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \text{Sin. } (b - a) \text{ Tang. } \varphi.$$

ad 4) $\text{Tang. } x = -\frac{\text{Cos. a Cos. }(b+\varphi)}{\text{Sin. b Cos. }(a-\varphi)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{Sin. b}}{\text{Cos. a}}\text{ Tang. }\varphi.$$

Oder: $\text{Tang. }(a+x) = \frac{\text{Sin. }(a+b-\varphi)}{\text{Sin. }\varphi\text{ Sin. }(a+b)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \text{Sin. }(a+b)\text{ Cotang. }\varphi.$$

ad 5) $\text{Tang. } x = -\frac{\text{Cos. a Cos. }(b+\varphi)}{\text{Sin. b Cos. }(a+\varphi)}$, wenn

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{Sin. b}}{\text{Cos. a}}\text{ Tang. }\varphi.$$

Oder: $\text{Tang. }(a-x) = \frac{\text{Sin. }(\varphi-b+a)}{\text{Sin. }\varphi\text{ Sin. }(b-a)}$, wenn

$\frac{m}{n} = \text{Sin. }(b-a)\text{ Cotang. }\varphi$ ist.

20. Wenn $m = 0{,}30103$; $n = 0{,}40206$; $a = 110° 19'$; $b = 38° 19'$ ist, den Winkel x aus den vorhergehenden fünf Gleichungen zu bestimmen.

Antwort. ad 1) $x = 95° 21' 11'',52$.
Oder: $x = 275° 21' 11'',52$.
ad 2) $x = 30° 37' 13'',59$.
Oder: $x = 210° 37' 13'',59$.
ad 3) $x = 94° 29' 45'',07$.
Oder: $x = 274° 29' 45'',07$.
ad 4) $x = 141° 41' 22'',61$.
Oder: $x = 321° 41' 22'',61$.
ad 5) $x = 85° 30' 14'',85$.
Oder: $x = 265° 30' 14'',85$.

21. Die Gleichung $a\text{ Tang. }x + b\text{ Cotang. }x = c$ aufzulösen.

Antwort. Man setze $\text{Tang. }x = y$, so ist die quadratische Gleichung $ay^2 - cy = -b$ aufzulösen.

22. Die Gleichung $x \sin.(a + \varphi) = m$,
$x \sin.(b + \varphi) = n$
aufzulösen, wenn x und φ unbekannt sind.

Antwort. Man eliminire aus beiden Gleichungen die Unbekannte x, so erhält man $n \sin.(a + \varphi) = m \sin.(b + \varphi)$, welche nach dem Obigen aufgelöst werden kann.

23. Trigonometrische Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade.

a) Es sei die Gleichung $x^2 + ax = b$ gegeben, so erhält man $x = \frac{-a \pm \sqrt{4b + a^2}}{2}$, woraus folgt, daß, wenn b positiv ist, die Wurzeln reell sind. Man kann nun die Wurzel schreiben: $x = \frac{-\left(a \mp a\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)}{2}$ und setzt man $\frac{4b}{a^2} = \text{Tang.}\,\varphi^2$, also $\frac{2\sqrt{b}}{a} = \text{Tang.}\,\varphi$, so erhält man $x = -\frac{a}{2}(1 \mp \text{Sec.}\,\varphi) = -\frac{a}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\text{Cos.}\,\varphi}\right)$. Weil nun zugleich $a = 2\sqrt{b}\,\text{Cotang.}\,\varphi$, so folgt noch für die positive Wurzelgröße $\sqrt{4b + a^2}$, $x = \sqrt{b}\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}\varphi$, und für die negative $x = -\sqrt{b}\,\text{Cotang.}\,\frac{1}{2}\varphi$.

b) Es sei die Gleichung $x^2 - ax = b$ gegeben; so findet man ebenso $x = \sqrt{b}\,\text{Cotang.}\,\frac{1}{2}\varphi$ für die positive Wurzelgröße und $x = -\sqrt{b}\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}\varphi$ für die negative.

c) Es sei die Gleichung $x^2 + ax = -b$ gegeben; so ist $x = \frac{-a \pm \sqrt{-4b + a^2}}{2}$ und die beiden Wurzeln sind noch reell, wenn $a^2 > 4b$ ist. Schreibt man daher $x = \frac{-a\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)}{2}$, so ist $\frac{4b}{a^2}$ immer ein

ächter Bruch, und wenn also $\frac{2\sqrt{b}}{a} = \text{Sin.}\ \varphi$ gesetzt wird, so erhält man

für die positive Wurzelgröße $x = - a\ \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi$,
oder auch $x = - \sqrt{b}\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\varphi$;
für die negative $x = - a\ \text{Cos.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi$,
oder auch $x = - \sqrt{b}\ \text{Cotang.}\ \tfrac{1}{2}\varphi$.

d) Wenn die Gleichung $x^2 - ax = - b$ gegeben ist, so erhält man

für die positive Wurzelgröße $x = a\ \text{Cos.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi$,
oder auch $x = \sqrt{b}\ \text{Cotang.}\ \tfrac{1}{2}\varphi$;
für die negative $x = a\ \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi$,
oder auch $x = \sqrt{b}\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\varphi$.

e) Weil immer der Coefficient $\pm a$ der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen und b dem Produkte derselben ebenfalls mit entgegengesetzten Zeichen gleich ist, so setze man z. B. für die Gleichung $x^2 + ax = b$, $\text{Tang.}\ \varphi + \text{Tang.}\ \varphi' = - a$, $\text{Tang.}\ \varphi\ \text{Tang.}\ \varphi' = - b$, woraus man $\text{Tang.}\ (\varphi + \varphi') = - \frac{a}{1 + b}$, d. h. die Summe der Winkel φ und φ' erhält. Weil ferner

$$\frac{\text{Cos.}\ (\varphi - \varphi')}{\text{Sin.}\ (\varphi + \varphi')} = \frac{\text{Cos.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \varphi' + \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Sin.}\ \varphi'}{\text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \varphi' + \text{Cos.}\ \varphi\ \text{Sin.}\ \varphi'}$$
$$= \frac{1 + \text{Tang.}\ \varphi\ \text{Tang.}\ \varphi'}{\text{Tang.}\ \varphi + \text{Tang.}\ \varphi'} \text{ ist,}$$

so erhält man $\text{Cos.}\ (\varphi - \varphi') = \frac{b - 1}{a}\ \text{Sin.}\ (\varphi + \varphi')$, wodurch auch die Differenz der Winkel φ und φ' gefunden ist. Hat man hieraus die Winkel φ und φ' selbst bestimmt, so sind die Wurzeln der Gleichung $\text{Tang.}\ \varphi$ und $\text{Tang.}\ \varphi'$. — Auf ähnliche Art kann mit den übrigen Gleichungen verfahren werden, und zugleich erhellet die trigonometrische Bestimmung imaginärer Wurzeln.

Beispiel 1) Den Werth von x aus der Gleichung

$$x^2 - 0{,}71423\,x = 14{,}6258$$

zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $\varphi = 84^\circ\ 39'\ 54'',92$ und

$$\left.\begin{array}{l} x = +\ 4{,}19812 \\ x = -\ 3{,}48389 \end{array}\right\}.$$

2) Es sei die Gleichung $x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716}$ aufzulösen.

Antwort. Man erhält $\varphi = 77^\circ\, 42'\, 31'',72$. $x = 0{,}29412$.
$= -\,0{,}45321$.

24. Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade.

Jede Gleichung vom dritten Grade wird auf die Form $x^3 + px + q = 0$ gebracht, und die Wurzeln dieser Gleichung stellen sich unter der Form

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

dar, oder wenn

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} = M, \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$= N$ gesetzt wird, unter $x = \sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N}$. Weil jede Wurzelgröße drei Werthe hat, so sind unter den neun durch Combination entstehenden Werthen jedoch nur diejenigen zu wählen, deren Produkt reell wird.

a) Ist nun M und N reell, so kann man setzen $\sqrt[3]{M} = m\sqrt[3]{1}$, wo m die absolute Cubikwurzel von M bezeichnet, und ebenso $\sqrt[3]{N} = n\sqrt[3]{1}$.

Die drei Cubikwurzeln von 1 sind aber $+1$, $\text{Cos.}\frac{2\pi}{3} + \text{Sin.}\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}$, $\text{Cos.}\frac{2\pi}{3} - \text{Sin.}\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}$ (wovon man sich durch einfache Multiplikation überzeugen kann), oder $+1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$.

Man erhält daher als Wurzeln der gegebenen Gleichung

1) $m + n$;

2) $(m + n)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right)$;

3) $(m + n)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right)$.

b) Es kann aber auch M und N imaginär sein (casus irreducibilis), in welchem Falle die Quadratwurzel unter der Form $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$ erscheint, wo p negativ und (absolut) $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ ist. Man kann dann $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}} \cdot \sqrt{-1}$ setzen, und wenn man $-\frac{q}{2}$ durch a, $\sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}$ durch b bezeichnet, so ist

$$x = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}.$$

Man kann nun die beiden Größen r, φ immer so bestimmen, daß $a = r \text{ Cos. } \varphi$, $b = r \text{ Sin. } \varphi$ ist; dann erhält man

$$x = \sqrt[3]{r}\sqrt[3]{\text{Cos.}\,\varphi + \text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{r}\sqrt[3]{\text{Cos.}\,\varphi - \text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1}}.$$

Es ist aber

$$\sqrt[3]{\text{Cos.}\,\varphi + \text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1}} = \text{Cos.}\,\frac{\varphi}{3} + \text{Sin.}\,\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1},$$

$$\text{oder} = \text{Cos.}\,\frac{(2\pi + \varphi)}{3} + \text{Sin.}\,\frac{2\pi + \varphi}{3}\sqrt{-1},$$

$$\text{oder} = \text{Cos.}\,\frac{\varphi - 2\pi}{3} + \text{Sin.}\,\frac{\varphi - 2\pi}{3}\sqrt{-1},$$

folglich

$$\sqrt[3]{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\varphi\sqrt{-1}}=\text{Cos.}\frac{\varphi}{3}+\text{Sin.}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1},$$

$$\text{oder} = -\text{Cos.}\left(60-\frac{\varphi}{3}\right)+\text{Sin.}\left(60-\frac{\varphi}{3}\right)\sqrt{-1},$$

$$\text{oder} = -\text{Cos.}\left(60+\frac{\varphi}{3}\right)-\text{Sin.}\left(60+\frac{\varphi}{3}\right)\sqrt{-1};$$

und ebenso

$$\sqrt[3]{\text{Cos.}\varphi-\text{Sin.}\varphi\sqrt{-1}}=\text{Cos.}\frac{\varphi}{3}-\text{Sin.}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1},$$

$$\text{oder} = -\text{Cos.}\left(60+\frac{\varphi}{3}\right)+\text{Sin.}\left(60+\frac{\varphi}{3}\right)\sqrt{-1},$$

$$\text{oder} = -\text{Cos.}\left(60-\frac{\varphi}{3}\right)-\text{Sin.}\left(60-\frac{\varphi}{3}\right)\sqrt{-1}.$$

Multiplicirt man letztere Werthe mit $\sqrt[3]{r}$ und addirt die zusammengehörigen, so erhält man als Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = 2\sqrt[3]{r}\ \text{Cos.}\ \frac{\varphi}{3},$$

$$x = -2\sqrt[3]{r}\ \text{Cos.}\ \left(60-\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x = -2\sqrt[3]{r}\ \text{Cos.}\ \left(60+\frac{\varphi}{3}\right),$$

wo $\text{Tang.}\,\varphi=\frac{b}{a},\ r=\frac{b}{\text{Sin.}\ \varphi}=\frac{a}{\text{Cos.}\ \varphi}=\sqrt{a^2+b^2}$ ist.

§. 5.

Berechnung der Dreiecke.

A. Rechtwinkelige Dreiecke.

Es sei im Dreiecke ABC der rechte Winkel mit C, die Hypotenuse mit c, die Katheten, welche den Winkeln A und B gegenüberliegen, mit a, b und die Fläche des Dreiecks mit $\triangle$ bezeichnet.

Haupt-Gleichungen:

1) $a = c \text{ Sin. } A = b \text{ Tang. } A = c \text{ Cos. } B;$

$b = c \text{ Sin. } B = a \text{ Tang. } B = c \text{ Cos. } A.$

2) $c^2 = a^2 + b^2.$

3) $$a + b = c \text{ Cos. } \frac{A - B}{2} \sqrt{2} = c \text{ Cos. } (45 - B) \sqrt{2};$$

$$a - b = c \text{ Sin. } \frac{A - B}{2} \cdot \sqrt{2} = c \text{ Sin. } (45 - B) \cdot \sqrt{2};$$

$$\frac{a - b}{a + b} = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(A - B) = \text{Tang. } (45 - B).$$

4) $$\frac{b}{a + c} = \text{Tang. } \frac{B}{2};$$

$$\frac{a}{b + c} = \text{Tang. } \frac{A}{2}.$$

5) $$\frac{c - a}{b} = \text{Tang. } \tfrac{1}{2} B;$$

$$\frac{c - b}{a} = \text{Tang. } \tfrac{1}{2} A.$$

6) $$\sqrt{\frac{c - a}{2c}} = \text{Sin. } \frac{B}{2}; \quad \sqrt{\frac{c - a}{c + a}} = \text{Tang. } \frac{B}{2};$$

$$\sqrt{\frac{c + a}{2c}} = \text{Cos. } \frac{B}{2}.$$

1. Gegeben sei: a, b; die übrigen Stücke zu finden.

Man erhält $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\text{Tang. } A = \text{Cotang. } B = \frac{a}{b}$; $\triangle = \tfrac{1}{2} ab$. Ist A und B gefunden, so kann man die Hypotenuse c durch die Gleichung $c = \frac{a}{\text{Sin. } A} = \frac{b}{\text{Sin. } B}$ berechnen. Ebenso kann c durch $c = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = b \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$ gefunden werden, wenn man $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$ als Tangente eines Hülfswinkels φ oder φ' betrachtet. Im ersten Falle ist $c = \frac{a}{\text{Cos. } \varphi}$,

im zweiten $c = \frac{b}{\text{Cos. } \varphi'}$. Zur Berechnung von A kann auch
$\text{Tang. } (45 - A) = \frac{b - a}{b + a}$ dienen.

Beispiel. Es sei $a = 451$, $b = 532$, so ist
$A = 40^\circ\ 17'\ 21'',92$; $B = 49^\circ\ 42'\ 38'',02$; $c = 697{,}442$;
$\triangle = 119966$.

Zur Probe kann man sich einer der Formeln in 3, 4, 5 bedienen, welche auch für die übrigen Fälle benützt werden können.

2. Gegeben sei a, A.

Es ist $B = 90^\circ - A$; $b = a \text{ Cotang. } A = a \text{ Tang. } B$,
$c = \frac{a}{\text{Sin. } A}$; $\triangle = \frac{1}{2} a^2 \text{ Cotang. } A$. Ist A nahe 90°, so berechne man, wenn der Winkel A auch noch Secunden enthält, c lieber durch die Gleichung $c = \frac{a}{2 \text{ Sin. } \frac{A}{2} \text{ Cos. } \frac{A}{2}}$ oder
$c = \frac{b}{\text{Cos. } A}$.

Wenn nemlich ein Winkel A sehr nahe 90° ist, so ändern sich die Werthe der Sinuse desselben und eines nahe an ihm liegenden Winkels sehr wenig, und man kann sich leicht überzeugen, daß die Zunahmen, welche die Sinuse solcher Winkel durch das Wachsthum um wenige Secunden erleiden, auch in den letzten Dezimalstellen wenig bemerkbar ist, was bei Winkeln, die ziemlich weit von 90° abstehen, nicht der Fall ist. Dieser Umstand ist dann noch mehr zu beachten, wenn ein solcher nahe an 90° liegender Winkel aus seinem Sinus selbst erst gefunden, oder wenn durch ihn noch andere Größen berechnet werden sollen. Im letztern Falle also ist eine Umänderung der trigonometrischen Formel um so nöthiger. Für Tangenten ist diese Abweichung nicht nöthig.

3. Gegeben sei b, A.

Es ist $B = 90^\circ - A$; $a = b \text{ Tang. } A$; $c = \frac{b}{\text{Cos. } A}$ $= \frac{b}{\text{Sin. } B}$; $\triangle = \frac{1}{2} b^2 \text{ Tang. } A$.

Beispiel. Es sei $b = 3242'$; $A = 35^\circ\ 29'\ 38''$; so ist $B = 54^\circ\ 30'\ 22''$; $a = 2311{,}975'$; $c = 3981{,}933'$; $\triangle = 3747710 \square'$.

4. Gegeben sei c, A.

Es ist $B = 90 - A$; $a = c \text{ Sin. } A$; $b = c \text{ Cos. } A$; $\triangle = \frac{1}{2} c^2 \text{ Sin. } A \text{ Cos. } A$.

Ist A nahe 90°, so bestimme man zuerst b aus $b = c \,.\, \text{Cos. } A$ und hernach a aus $a = \sqrt{(c + b)(c - b)}$.

Beispiel. Es sei $c = 18{,}25$; $A = 16^\circ\ 27'$; so ist $a = 5{,}17$; $b = 17{,}5$; $\triangle$ $45{,}22 \square'$.

5. Gegeben sei c, a.

Es ist $\text{Sin. } A = \text{Cos. } B = \frac{a}{c}$; $b = \sqrt{(c + a)(c - a)}$;

$\triangle = \frac{1}{2} a \sqrt{(c + a)(c - a)} = \frac{1}{2} ac \text{ Sin. } B$.

Ist A oder B sehr nahe 90° oder 0°, so bestimme man lieber die Hälfte des Winkels mittelst der Formel $\sqrt{\frac{c - a}{2c}}$ $= \text{Sin. } \frac{B}{2}$ oder $\sqrt{\frac{c - a}{c + a}} = \text{Tang. } \frac{B}{2}$.

Beispiel. Gegeben sei $a = 197{,}34$; $c = 473{,}74$; so ist $A = 24^\circ\ 37'\ 2'',7$; $B = 65^\circ\ 22'\ 57'',7$; $b = 430{,}68$; $\triangle = 42495 \square'$.

§. 6.

B. Schiefwinkelige Dreiecke.

Es seien a, b, c die Seiten, welche den Winkeln A, B, C gegenüberliegen.

Haupt-Gleichungen:

1) $A + B + C = 180.$

2) $\text{Sin. } A = \text{Sin. } (B + C);$

$\text{Cos. } A = -\text{Cos. } (B + C);$

$\text{Tang. } A = -\text{Tang. } (B + C);$

$\text{Cotang. } A = -\text{Cotang. } (B + C).$

3) $\text{Sin. } \frac{A}{2} = \text{Cos. } \frac{(B + C)}{2};$

$\text{Cos. } \frac{A}{2} = \text{Sin. } \frac{B + C}{2};$

$\text{Tang. } \frac{A}{2} = \text{Cotang. } \frac{B + C}{2};$

$\text{Cotang. } \frac{A}{2} = \text{Tang. } \frac{B + C}{2}.$

4) $a \text{ Sin. } B = b \text{ Sin. } A;$

$a \text{ Sin. } C = c \text{ Sin. } A;$

$b \text{ Sin. } C = c \text{ Sin. } B.$

5) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos. } A;$

$a^2 = (b + c)^2 - 4bc \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} A^2;$

$a^2 = (b - c)^2 - 4bc \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} A^2$ u. s. w.

6) a) $\frac{a + b}{c} = \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(A - B)}{\text{Sin. } \frac{1}{2} C};$

b) $\frac{a - b}{c} = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(A - B)}{\text{Cos. } \frac{1}{2} C};$

c) $\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2} C.$

Weil die Gleichungen in Nr. 6 in vielen Schulbüchern für Trigonometrie sich nicht vorfinden, so folge hier ihre Entwicklung. Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Sin. } A}{\text{Sin. } B}, \text{ woraus } \frac{a \pm b}{b} = \frac{\text{Sin. } A \pm \text{Sin. } B}{\text{Sin. } B}$$

oder $\frac{a \pm b}{c} = \frac{\text{Sin. } A \pm \text{Sin. } B}{\text{Sin. } C}$ folgt.

$$\text{Weil nun } \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{und } \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\text{oder } \sin A + \sin B = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{(A-B)}{2};$$

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\text{und auch noch } \sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2},$$

so erhält man nach gehöriger Substitution für das obere Zeichen

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C}$$

und für das untere Zeichen

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

Durch Division der ersten dieser Gleichungen in die zweite erhält man die gebräuchliche Formel

$$\frac{a-b}{a+b} \operatorname{Cotang.} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{Tang.} \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Die obigen beiden Gleichungen enthalten nicht allein die allgemeine Beziehung zwischen den sechs Stücken eines Dreiecks, sondern sie geben auch eine bequeme Auflösungsmethode, wenn aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel oder aus einer Seite und den Winkeln die übrigen unbekannten Stücke eines Dreiecks gefunden werden sollen.

§. 7.

1. Gegeben sei eine Seite und zwei Winkel, z. B. a, B, C.

Es ist $A = 180 - (B + C)$; $b = \frac{a \text{ Sin. } B}{\text{Sin. } (B + C)} = \frac{a \text{ Sin. } B}{\text{Sin. } A}$;

$$c = \frac{a \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } (B + C)} = \frac{a \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } A}; \; \triangle = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } (B + C)}$$

$$= \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } A}.$$

Zur Probe bedient man sich bequem einer der Gleichungen in Nr. 6 des vorigen §.

Beispiel. Es sei $a = 5814$; $B = 103° 18'$; $C = 34° 47'$; so ist

$A = 41° 55'$; $b = 8469{,}53$; $c = 4964{,}82$; $\triangle = 14045620 \square'$.

2. Gegeben seien: 2 Seiten b, c, und einer der Gegenwinkel, z. B. B.

Es ist $\text{Sin. } C = \frac{c \text{ Sin. } B}{b}$; $A = 180 - (B + C)$;

$$a = \frac{b \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } B}.$$

Da zu jedem Sinus zwei Winkel gehören, wovon der eine im ersten Quadranten, der andere im zweiten endigt, so erhält man auch für C zwei Werthe. Die Aufgabe läßt also im Allgemeinen zwei Auflösungen zu. Sie ist aber bestimmt:

1) wenn $b = c$ ist; denn dann ist $B = C$ und beide Winkel spitz;

2) wenn $b > c$; denn dann ist C immer spitz.

Sie läßt aber zwei Auflösungen zu, wenn $b < c$ ist.

Beispiel 1) Es sei $b = 541{,}6$; $c = 413{,}8$; $B = 67° 38'$; so ist $C = 44° 57' 18'',35$; $A = 67° 24' 41'',65$; $a = 540{,}73$; $\triangle = 103461$.

Beispiel 2) Es sei gegeben: $b = 2514$; $c = 3000$; $B = 49° 40'$; so ist

$C = 65° 27' 28'',4$; $A = 64° 52' 31'',6$; $a = 2985{,}92$;
$\triangle = 3414277 \square'$ oder
$C = 114° 32' 31{,}6''$; $A = 15° 47' 28'',4$; $a = 897{,}48$;
$\triangle = 1021498 \square'$.

3) Es seien gegeben: zwei Seiten a, b, und der von ihnen eingeschlossene Winkel C.

I. Aus der zweiten Gleichung in Nr. 5 des vorigen §. folgt:

$$c^2 = (a + b)^2 - 4ab \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} C^2.$$

Setzt man $2\sqrt{ab} \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} C = z$, so erhält man sogleich

$$c = \sqrt{(a + b + z)(a + b - z)}.$$

Wenn hieraus c gefunden ist, so erhält man die Winkel A und B durch die Gleichungen $\text{Sin. } B = \frac{b \text{ Sin. } C}{c}$;

$$\text{Sin. } A = \frac{a \text{ Sin. } C}{c} \text{ und } \triangle = \tfrac{1}{2} ab \text{ Sin. } C.$$

II. Mittelst der Formeln in Nr. 6 des vorigen §.

Durch die Formel c erhält man mit Tang. ½ (A — B) zugleich auch Sin. ½ (A — B) und Cos. ½ (A — B); ebenso mit Tang. ½ C zugleich Sin. ½ C und Cos. ½ C. Diese Werthe substituire man in die Formeln a und b, welche c durch die beiden Gleichungen

$$c = \frac{(a + b) \text{ Sin. } \frac{1}{2} C}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(A - B)} \text{ und } c = \frac{(a - b) \text{ Cos. } \frac{1}{2} C}{\text{Sin. } \frac{1}{2}(A - B)}$$

geben, wodurch man sämmtliche unbekannte Stücke des Dreiecks erhält und sich von der Richtigkeit der Rechnung ohne weitere Revision überzeugt.

Beispiel. Es sei a = 495′; b = 536′; C = 47° 18′.

Weil b > a ist, so vertausche man in obigen Gleichungen b mit a und B mit A. Die Rechnung steht dann folgendermassen:

$$\begin{aligned}
b - a &= 41 \\
b + a &= 1031 \\
\hline
\text{Log. Cotang. } \tfrac{1}{2} C &= 10{,}3585964 \\
\text{Log. } (b - a) &= 1{,}6127839 \\
\text{Compl. Log. } (b + a) &= 6{,}9867413 \\
\hline
\text{Log. Tang. } \tfrac{1}{2}(B - A) &= 8{,}9581216 \\
\hline
\tfrac{1}{2}(B - A) &= 5^\circ\ 11'\ 19'',16 \\
\hline
B - A &= 10^\circ\ 22'\ 38'',32 \\
B + A &= 132\ 42 \\
\hline
B &= 71^\circ\ 32'\ 19'',16 \\
A &= 61^\circ\ \ 9'\ 40'',84
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Log. } (b + a) & = 3{,}0132587 \\
\text{Log. Sin. } \tfrac{1}{2} C & = 2{,}6033052 \\ \hline
& = 2{,}6165639 \\
\text{Log. Cos. } \tfrac{1}{2} (B - A) & = 9{,}9982168 \\ \hline
\text{Log. } c & = 2{,}6183471 \\
c & = 415{,}286
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Log. } (b - a) & = 1{,}6127839 \\
\text{Log. Cos. } \tfrac{1}{2} C & = 9{,}9619016 \\ \hline
& = 1{,}5746855 \\
\text{Log. Sin. } \tfrac{1}{2} (B - A) & = 8{,}9563384 \\ \hline
\text{Log. } c & = 2{,}6183471 \\
c & = 415{,}286
\end{array}$$

Man erhält daher $A = 61^\circ\, 9'\, 40'',84$; $B = 71^\circ\, 32'\, 19'',16$; $c = 415{,}286$; $\triangle = 97494 \,\square'$.

Die Seite c kann auch durch die Hauptformel Nr. 4 berechnet werden, wenn zuvor, wie oben, die Winkel a und b gefunden sind.

III. Durch die Formel $c^2 = (a + b)^2 - 4ab \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} C^2$ findet man $c = (a + b) \text{ Sin. } \varphi$, wenn $\dfrac{2 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} C . \sqrt{ab}}{a + b} = \text{Cos. } \varphi$ gesetzt wird, was immer geschehen kann, da sich leicht nachweisen läßt, daß $a + b \overline{>} 2\sqrt{ab}$ ist.

IV. Durch die Formel $c^2 = (a - b)^2 + 4ab \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} C^2$ findet man $c = \dfrac{a - b}{\text{Cos. } \varphi}$, wo φ durch $\text{Tang. } \varphi = \dfrac{2\sqrt{ab} \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} C}{a - b}$ bestimmt ist.

V. Bringt man die Gleichung $\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (A - B) = \dfrac{a - b}{a + b} \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2} C$ auf die Form $\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (A - B) = \dfrac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2} C$, so ist, wenn $\dfrac{b}{a} = \text{Tang. } \varphi$ gesetzt

wird, $\text{Tang.}\ \frac{1}{2}(A - B) = \text{Cotang.}\ \frac{1}{2}C\ \text{Cotang.}\ (45 + \varphi)$, welche Formel sehr bequem ist, wenn statt der Zahlen a und b ihre Logarithmen bekannt sind, was in gewissen Rechnungen häufig vorkommt.

4. Es seien die drei Seiten a, b, c gegeben.

Man erhält $\text{Cos.}\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4bc}}$;

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a + c - b)(a + b - c)}{4bc}};$$

oder noch bequemer, wenn $\frac{a + b + c}{2} = H$ gesetzt wird,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{H(H - a)}{bc}};\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(H - b)(H - c)}{bc}}.$$

Aus beiden folgt noch

$$\text{Sin.}\ A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)};$$

$$\text{Sin.}\ A = \frac{2}{bc}\sqrt{H(H - a)(H - b)(H - c)}.$$

Beispiel. Gegeben sei $a = 5649$; $b = 8715$; $c = 7308$;
so ist $A = 40^\circ\ 5'\ 29''$;
$B = 83^\circ\ 29'\ 9{,}2''$;
$C = 56^\circ\ 25'\ 21{,}8''$.

§. 8.

Die einfachsten trigonometrischen Sätze.

1. Ein Kreisbogen vom Radius = 1 wird in einen Winkel verwandelt, wenn man ihn mit Sin. 1″ dividirt, wodurch man die Anzahl der zugehörigen Secunden erhält.

Ein Winkel, welcher in Secunden ausgedrückt ist, wird in den zugehörigen Bogen verwandelt, wenn man ihn mit Sin. 1″ multiplicirt.

Denn wenn mit π der halbe Umfang eines Kreises vom Halbmesser 1 bezeichnet wird, so erhält man für den beliebigen Kreisbogen A aus der Proportion

$$\pi : A = 180^\circ : x$$

die Gleichung

$$\text{Winkel } A^\circ = \frac{180 \,.\, \text{Arc. } A}{\pi};$$

folglich in Secunden

$$\text{Winkel } A'' = \frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60 \,.\, \text{Arc. } A}{\pi}.$$

Weil aber $\frac{\pi}{180 \,.\, 60 \,.\, 60}$, d. h. die Länge einer Secunde, dem zugehörigen Sin. 1″ sehr nahe kommt, so erhält man

$$\text{in Secunden Winkel } A'' = \frac{\text{Arc. } A}{\text{Sin. } 1''}, \text{ also auch}$$

$$\text{in Minuten Winkel } A'' = \frac{\text{Arc } A}{60 \,.\, \text{Sin. } 1''} \text{ und}$$

$$\text{in Graden Winkel } A^\circ = \frac{\text{Arc. } A}{60^2 \,.\, \text{Sin. } 1''}.$$

Es ist Sin. 1″ (sehr nahe = 1″) = 0,000004848.

Bezeichnet man die Werthe $\frac{1}{60 \text{ Sin. } 1''}$, $\frac{1}{60^2 \text{ Sin. } 1''}$ mit $\frac{1}{M'}$, $\frac{1}{M^\circ}$, so ist

$$\text{Log. Sin. } 1'' = 4{,}6855749 - 10 \quad \text{I.}$$
$$\text{Log. } M' = 6{,}4637262 - 10 \quad \text{II.}$$
$$\text{Log. } M^\circ = 8{,}2418775 - 10 \quad \text{III.}$$
$$\text{Compl. Log. Sin. } 1'' = 5{,}3144251 \quad \text{IV.}$$
$$\text{Compl. Log. } M' = 3{,}5362738 \quad \text{V.}$$
$$\text{Compl. Log. } M^\circ = 1{,}7581225 \quad \text{VI.}$$

Ebenso muß der Winkel A′ (A in Minuten ausgedrückt) mit 60 Sin. 1″ und der Winkel A° mit 60² Sin. 1″ multiplicirt werden, um den zugehörigen Bogen zu erhalten, was aus dem Vorhergehenden sogleich folgt.

Anmerkung. Um also die Anzahl der Grade, Minuten oder Secunden zu finden, welche ein gegebener Kreisbogen enthält, wird man zum Logarithmus des Bogens die Zahl in Nr. VI, V, IV addiren. Der zugehörige Numerus gibt die Anzahl derselben. — Will man umgekehrt die Länge des Bogens finden, welcher einer gegebenen Anzahl von Graden, Minuten oder Secunden entspricht, so muß zum Logarithmus dieser Anzahl der Logarithmus, welcher in III, II, I steht, addirt werden u. s. w.

Beispiele. Die Winkel zu finden, welche den Bogenlängen 0,974843; 1''; 1,5; 2; 2,345678 entsprechen.

Antwort. Man findet: 55° 51' 15''; 57° 17' 44,8; 85° 56' 37,1; 114° 35' 29,61; 134° 23' 51'',8.

Wie groß ist die Bogenlänge der Winkel von 30°; 51° 25' 48''; 72° 19' 42''; 90°; 135° 7' 46''?

Antwort. 0,523599; 0,897623; 1,262368; 1,570796; 2,358453.

Hieraus ist klar, wie man Winkel und Bögen in Kreisen vom Halbmesser r zu behandeln hat.

2. In jedem Dreiecke ist die Summe der Sinus von zwei Winkeln größer, als der Sinus des dritten Winkels.

3. In jedem Dreiecke ist, wenn mit A, B, C die drei Winkel bezeichnet werden:

$$\text{Sin.}^2 A = \text{Sin.}^2 B + \text{Sin.}^2 C - 2\,\text{Sin. } B\ \text{Sin. } C\ \text{Cos. } A.$$
$$\text{Sin.}^2 B = \text{Sin.}^2 A + \text{Sin.}^2 C - 2\,\text{Sin. } A\ \text{Sin. } C\ \text{Cos. } B.$$
$$\text{Sin.}^2 C = \text{Sin.}^2 A + \text{Sin.}^2 B - 2\,\text{Sin. } A\ \text{Sin. } B\ \text{Cos. } C.$$

Denn weil $\frac{a}{b} = \frac{\text{Sin. } A}{\text{Sin. } B}$, $\frac{c}{b} = \frac{\text{Sin. } C}{\text{Sin. } B}$, so folgen aus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \text{Cos. } A \text{ u. s. w.}$$

durch Substitution obige Relationen sogleich.

4. Jede Dreiecksseite ist gleich der Summe der beiden andern Seiten, jede multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit ersterer bildet.

5. Jede Seite eines Vielecks ist gleich der Summe der andern Seiten, nachdem jede der letztern mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen die erstern (letzteren nach einerlei Richtung auf dem Umfange genommen) multiplicirt ist.

6. Die Summe der Quadrate der drei Seiten eines Dreiecks ist der doppelten Summe der Produkte je zweier Seiten und des Cosinus des zwischen liegenden Winkels gleich; d. h. es ist

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab \text{ Cos. } C + 2ac \text{ Cos. } B + 2bc \text{ Cos. } A.$$

7. In jedem Vielecke ist die Summe der Quadrate aller Seiten der doppelten Summe der Produkte je zweier Seiten und des Cosinus des zwischen liegenden Winkels gleich.

8. Wenn man einen beliebigen Punkt O mit den Ecken A, B, C eines Dreiecks verbindet und bezeichnet die Linien OA, OB, OC mit a′, b′, c′, die Dreiecksseiten mit a, b, c und die zwischen zwei dieser Linien liegenden Winkel mit den den Schenkeln zugehörigen Buchstaben, so ist immer

$$ac' \text{ Cos. } (ac') + b'c \text{ Cos. } (b'c) + ba' \text{ Cos. } (ba') =$$
$$a'c \text{ Cos. } (a'c) + bc' \text{ Cos. } (bc') + ab' \text{ Cos. } (ab').$$

Dieser Satz gilt auch für jedes Vieleck.

9. Jede Seite eines Dreiecks ist dem Produkte des Durchmessers des umbeschriebenen Kreises in den Sinus des der Seite gegenüberliegenden Winkels gleich.

10. Wenn r den Halbmesser des innern und ϱ', ϱ'', ϱ''' die Halbmesser der äußern Berührungskreise, welche bezüglich den Winkeln A, B, C gegenüberliegen, bezeichnen, so ist

$$r = \frac{a \text{ Sin. } \frac{1}{2}B \text{ Sin. } \frac{1}{2}C}{\text{Cos. } \frac{1}{2}A}; \quad \varrho' = \left.\begin{aligned} &\frac{a \text{ Cos. } \frac{1}{2}B \text{ Cos. } \frac{1}{2}C}{\text{Cos. } \frac{1}{2}A} \\ = &\frac{b \text{ Sin. } \frac{1}{2}A \text{ Cos. } \frac{1}{2}C}{\text{Sin. } \frac{1}{2}B} \\ = &\frac{c \text{ Sin. } \frac{1}{2}A \text{ Cos. } \frac{1}{2}B}{\text{Sin. } \frac{1}{2}C} \end{aligned}\right\};$$

$$\varrho'' = \frac{b \,\text{Cos.}\, \frac{A}{2} \,\text{Cos.}\, \frac{C}{2}}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2} B}$$ und analog wie vorher;

$$\varrho''' = \frac{c \,\text{Cos.}\, \frac{A}{2} \,\text{Cos.}\, \frac{B}{2}}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2} C}$$ " " " "

11. Wenn R den Halbmesser des um ein Dreieck ABC beschriebenen Kreises bezeichnet, so ist

$$2R = \frac{a + b + c}{\text{Sin. } A + \text{Sin. } B + \text{Sin. } C} = \frac{a + b + c}{4 \,\text{Cos.}\, \frac{1}{2} A \,\text{Cos.}\, \frac{1}{2} B \,\text{Cos.}\, \frac{1}{2} C}$$

$$= \frac{a}{\text{Sin. } A} = \frac{b}{\text{Sin. } B} = \frac{c}{\text{Sin. } C}.$$

12. Wenn R und r die vorige Bedeutung haben, so ist

$$\frac{r}{R} = \text{Cos. } A + \text{Cos. } B + \text{Cos. } C - 1$$

$$= 4 \,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} A \,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} B \,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} C.$$

13. Zieht man durch eine Spitze C eines Dreiecks ABC eine Transversale CD, welche die Gegenseite c in die beiden Abschnitte AD = n und BD = m theilt und bezeichnet man den Winkel ACD mit γ, BCD mit δ, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{m \,\text{Sin. } \gamma}{n \,\text{Sin. } \delta}.$$

Ist daher m = n, so verhalten sich die den Winkel C einschließenden Seiten umgekehrt wie die Sinus der an diesen Seiten liegenden Theile des Winkels ACB.

Wenn das Dreieck in C rechtwinkelig ist und CD auf AB senkrecht steht, so ist

$$\frac{m}{n} = \text{Tang.}^2 A.$$

14. Fällt man in einem Dreiecke ABC aus den Winkelspitzen die drei Höhen, und bildet das Dreieck, dessen Ecken die Fußpunkte der Höhen sind, so ist, wenn a′, b′, c′ die Seiten des

einbeschriebenen Dreiecks sind, welche den Seiten a, b, c gegenüberliegen, bedeuten:

$a' = a \text{ Cos. } A$ und analog $b' = b \text{ Cos. } B$, $c' = c \text{ Cos. } C$.

Denn es sei (Fig. 10) $EF = a'$, so ist

$$a'^2 = AF^2 + AE^2 - 2AF \,.\, AE \text{ Cos. } A.$$

Weil nun auch $AF = b \text{ Cos. } A$, $AE = c \,.\, \text{Cos. } A$, und $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos. } A$, so folgt obige Relation.

Ebenso ist der Halbmesser r des Kreises, welcher um das Viereck AEOF beschrieben werden kann, durch R Cos. A ausgedrückt, wenn R den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises bezeichnet.

Der Halbmesser ϱ des Kreises, welcher durch die Fußpunkte der drei Höhen geht, ist die Hälfte des Halbmessers R.

Es ist ferner $AO = a \text{ Cotang. } A$, $BO = b \text{ Cotang. } B$, $CO = c \text{ Cotang. } C$. Diese drei Linien werden von dem Kreise, welcher durch die Fußpunkte der drei Höhen geht, ebenfalls halbirt. Denn weil z. B. BE eine Secante dieses Kreises ist, so ist, wenn man das außerhalb des Kreises liegende Stück derselben mit x bezeichnet, $x \,.\, BE = BN \,.\, BF$. Hieraus und weil $BO = b \text{ Cotang. } B$ ist, findet sich $x = \frac{1}{2} BO$. — (Vergl. I, I. 29.)

Bezeichnet man mit U den Umfang des gegebenen Dreiecks und mit U′ den Umfang des Höhendreiecks, so ist

$$\text{Cos. } A + \text{Cos. } B + \text{Cos. } C = \frac{U + U'}{U}.$$

15. Werden im Dreiecke ABC die Winkel A, B, C durch die Linien t, t′, t″ halbirt, so ist

$$t = \frac{2bc \text{ Cos. } \frac{1}{2}A}{b + c},\ t' = \frac{2ac \text{ Cos. } \frac{1}{2}B}{a + c},\ t'' = \frac{2ab \text{ Cos. } \frac{1}{2}C}{a + b}.$$

Denn bezeichnet man den Durchschnitt von t mit c durch D und setzt $AD = m$, $BD = n$, so folgt aus den beiden Gleichungen $\frac{m}{t} = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}C}{\text{Sin. } A}$ und $\frac{n}{t} = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}C}{\text{Sin. } B}$ die neue Gleichung $t = \frac{b \text{ Sin. } A}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(A - B)}$. Weil nun noch $\text{Cos. } \frac{1}{2}(A - B)$

$= \frac{(a + b) \text{ Sin. } \frac{1}{2} C}{c}$ und c Sin. A $=$ a Sin. C ist, so erhält man obigen Werth.

16. Wird eine begrenzte Gerade a auf eine andere Gerade projicirt, so ist, wenn φ der Neigungswinkel beider Linien ist, die Projektion p ausgedrückt durch

$$p = a \text{ Cos. } \varphi.$$

17. Wenn die Diagonalen eines Vierecks mit D und D' und der Neigungswinkel derselben mit φ, so ist der Inhalt des Vierecks ausgedrückt durch

$$F = \tfrac{1}{2} D D' \text{ Sin. } \varphi.$$

18. Wenn ein Viereck ABCD einem Kreise einbeschrieben ist, und es sind AC und BD die beiden Diagonalen desselben, so ist

$$AC : BD = \text{Sin. } B : \text{Sin. } C.$$

19. Werden die Seiten AB, BC, CD, DA eines solchen Vierecks mit a, b, c, d und der Halbmesser des umbeschriebenen Kreises mit R bezeichnet, so ist

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \text{Cos. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(b + c + d - a)(a + b + c - d)}{4(ad + bc)}};$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} B = \text{Cos. } \tfrac{1}{2} D = \sqrt{\frac{(b + c + d - a)(a + c + d - b)}{4(ab + cd)}};$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} C = \text{Cos. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a + c + d - b)(a + b + d - c)}{4(ad + bc)}};$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} D = \text{Cos. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a + b + c - d)(a + b + d - c)}{4(ab + cd)}}.$$

Die Diagonalen BD und AC sind bestimmt durch

$$BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}};$$

$$AC = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}.$$

Der Halbmesser des Kreises, welcher um das Viereck beschrieben ist, wird durch die Gleichung

$$R = \frac{1}{4F} \sqrt{(ad + bc)\,(ab + cd)\,(ac + bd)}$$

bestimmt, wo F die Fläche des Vierecks bezeichnet.

Denn es ist $2R\ \text{Sin.}\ A = BD$, $2R\ \text{Sin.}\ B = AC$, $F = \frac{1}{2}(ad + bc)\ \text{Sin.}\ A$ und $F = \frac{1}{2}(ab + cd)\ \text{Sin.}\ B$. Durch Multiplication der beiden erstern und dann der beiden letztern Gleichungen erhält man den Ausdruck, wenn man noch berücksichtigt, daß $AC \,.\, BD = ac + bd$ ist.

20. Wenn aber in einem Vierecke ABCD, dessen Seiten mit a, b, c, d bezeichnet sind, zwei Gegenwinkel A und C einander gleich sind, so ist jeder dieser Winkel bestimmt durch

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}A = \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(a+b+c+d)\,(a+d-b-c)}{4\,(ad - bc)}}.$$

Die Diagonale, welche die ungleichen Winkel B und D verbindet, ist bestimmt durch

$$BD = \sqrt{\frac{(bd-ac)\,(ab-cd)}{ad - bc}}.$$

Der Inhalt ist bestimmt durch

$$F = \tfrac{1}{4}\frac{(ad+bc)}{(ad-bc)}\sqrt{(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a+d-b-c)\,(b+d-a-c)}.$$

21. Sind aus einem Punkte an einen Kreis vom Halbmesser r zwei Tangenten gezogen, welche mit einander den Winkel α bilden, so ist die Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet, ausgedrückt durch

$$2r\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha$$

und die Tangente durch $r\ \text{Cotang.}\ \frac{1}{2}\alpha$.

22. Wenn die Anzahl der Seiten eines regulären Vielecks mit n bezeichnet wird, so ist die Seite s desselben für den Halbmesser 1 ausgedrückt durch

$$s = \tfrac{1}{2}\ \text{Sin.}\ \frac{\pi}{n}$$

und der Inhalt durch

$$F = \frac{n}{2} \text{Sin.} \frac{2\pi}{n}.$$

23. Wenn hingegen a die Seite des regulären n Ecks ist, so ist der Halbmesser des um- und einbeschriebenen Kreises bestimmt durch

$$R = \frac{a}{2 \text{Sin.} \frac{\pi}{n}}; \; r = \frac{a}{2} \text{Cotang.} \frac{\pi}{n};$$

$$F = \frac{na^2}{4} \text{Cotang.} \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} R^2 \text{Sin.} \frac{2\pi}{n}.$$

24. Die Seite des Vielecks von n Seiten, welches um den Kreis beschrieben ist, ist durch

$$a = 2 R \text{ Tang.} \frac{\pi}{n}$$

und die Fläche desselben durch

$$F = R^2 \text{ Tang.} \frac{\pi}{n}$$

ausgedrückt.

Aus diesen beiden vorhergehenden Sätzen läßt sich sogleich ableiten, daß das in einen Kreis beschriebene reguläre Vieleck von n Seiten die mittlere Proportionale zwischen dem ein- und umbeschriebenen Vieleck von n Seiten ist. Ferner: Das um den Kreis beschriebene Vieleck von 2 n Seiten ist das harmonische Mittel zwischen dem in den Kreis beschriebenen Vieleck von 2 n Seiten und dem um den Kreis beschriebenen von n Seiten.

§. 9.

Vermischte Aufgaben.

1. Von einem rechtwinkeligen Dreiecke ABC sei die Summe s einer Kathete a und der Hypotenuse c nebst dem Winkel A gegeben; die übrigen Stücke des Dreiecks zu finden.

Antwort. Man erhält: Kathete $b = S \text{ Tang.} (45 - \frac{1}{2} A)$;

$$\text{Hypotenuse } c = \frac{S}{2 \text{ Cos.} (45 - \frac{1}{2} A)^2}.$$

Beispiel. Es sei $S = 1026'$; $A = 46^\circ\ 10'\ 35'',46$;
so ist $b = 412,693$; $c = 596$.

2. Im rechtwinkeligen Dreiecke sei der Umfang U und ein Winkel A gegeben; die übrigen Stücke zu finden.

Antwort. Man erhält:

$$\text{Hypotenuse } c = \frac{U}{2\sqrt{2} \text{ Cos.} \frac{A}{2} \text{ Sin.} (45 + \frac{1}{2} A)};$$

$$\text{Kathete } a = \frac{U \text{ Sin.} \frac{1}{2} A}{\sqrt{2} \text{ Sin.} (45 + \frac{1}{2} A)};$$

$$\text{Kathete } b = \frac{U \text{ Cos. } A}{2\sqrt{2} \text{ Cos.} \frac{1}{2} A \text{ Sin.} (45 + \frac{1}{2} A)}.$$

Denn weil $b = c \text{ Cos. } A$, $a = c \text{ Sin. } A$, so erhält man sogleich $c = \frac{U}{1 + \text{Sin. } A + \text{Cos. } A}$, worin sich der Nenner auf obige Form leicht bringen läßt.

3. Das rechtwinkelige Dreieck aus der Fläche F und dem spitzen Winkel A zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $a = \sqrt{2F \text{ Tang. } A}$, $b = \sqrt{2F \text{ Cotang. } A}$,

$$c = 2\sqrt{\frac{F}{\text{Sin. } 2A}}.$$

Beispiel. Es sei $F = 4623\square'$; $A = 58^\circ 16'$;
so ist $a = 122,275$; $b = 75,617$; $c = 143,767$.

4. Im rechtwinkeligen Dreiecke aus Umfang U und Fläche F die Winkel zu berechnen.

Antwort. Man erhält $\text{Sin. } 2A = \frac{16 F U^2}{(U^2 - 4F)^2}$.

In welchem Falle wird die Aufgabe unmöglich?

5. Die senkrechte Höhe eines Thurmes zu finden, wenn man zu dessen Fuß nicht gelangen kann.

Antwort. Man messe eine Länge a, welche mit der Spitze des Thurmes eine auf dem Horizont senkrecht stehende Ebene bestimmt, und die Winkel α, β, welche an den Endpunkten der Geraden a von dieser und den nach der Spitze des Thurmes gehenden Gesichtslinien gebildet werden, so ist die Höhe x bestimmt durch

$$x = \frac{a \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)}.$$

6. Unter welchem Winkel φ betrachtet ein Mann von 6 Fuß Größe einen Thurm, welcher von ihm 150 Fuß entfernt und 100 Fuß hoch ist?

Antwort. $\varphi = 34^\circ\ 21'\ 52'',6$.

7. Wenn allgemein die Höhe des Auges über die Horizontalebene mit c, die Höhe des Thurmes mit a und die Horizontal-Entfernung des Auges vom Thurme mit b bezeichnet wird, durch welche Gleichung ist der Sehewinkel bestimmt?

Antwort. Man erhält $\text{Tang. } \varphi = \frac{a\,b}{b^2 - c\,(a - c)}$.

8. In welcher Entfernung muß sich das Auge befinden, damit der Sehewinkel ein rechter ist, unter übrigens gleichen Verhältnissen, wie in Nr. 6?

9. Wenn von zwei Billardkugeln die eine b die andere $b_{,}$ Fuß von einer Bande des Billards und von einander c Fuß entfernt sind, unter welchem Winkel φ hat man die erstere gegen dieselbe Bande abzustoßen, damit die zweite central getroffen wird?

Antwort. Es ist $\text{Sin. } \varphi = \frac{b + b_{,}}{\sqrt{c^2 + (b + b_{,})^2}}$.

10. Ein Feld, welches die Gestalt eines Rechtecks hat, soll aus einer Ecke in drei Theile getheilt werden; welchen Winkel bilden die Theilungslinien mit einander, wenn die Seiten 204 und 560′ lang sind?

Antwort. $15^\circ\ 0'\ 10'',9$.

11. Durch welche Gleichung wird der Winkel φ, welchen die Theilungslinien bilden, bestimmt, wenn die Seiten des Rechtecks m und n Fuß lang sind?

Antwort. Es ist $\varphi = \text{Arc.}\left(\text{Cotang.} = \frac{6}{5}\left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right)\right)$.

12. Welchen Winkel φ schließen die Diagonalen eines Rechtecks ein, wenn die Diagonale = d und eine Seite a gegeben ist.

Antwort. Es ist $\text{Sin. } \frac{1}{2}\varphi = \frac{a}{d}$.

13. Die beiden Diagonalen eines Rhombus seien 40 und 50 Zoll lang, welchen Winkel schließen die Seiten desselben ein?

Antwort. 77° 19′ 10″,62.

14. Unter welchem Winkel muß eine Gerade a zwischen die Schenkel eines rechten Winkels gelegt werden, damit das hierdurch gebildete Dreieck den Inhalt F habe?

Antwort. Der verlangte Winkel φ ist bestimmt durch

$$\text{Sin. } 2\varphi = \frac{4F}{a^2}.$$

15. Aus der Kreuzung zweier sich unter rechtem Winkel durchschneidenden Straßen gehen zu gleicher Zeit zwei Fußgänger A und B in beiden Straßen ab, und zwar der eine, A, mit einer Geschwindigkeit 1,6. Nach 5 Minuten sieht sich A nach B um und mußte daher eine Wendung von 137° machen. Er beeilt seine Schritte, und als er sich nach den nächsten 8 Minuten wieder nach B umsieht, mußte er eine Wendung von 140° machen. Wie groß war jetzt seine Geschwindigkeit, wie groß die des B, und wie weit waren beide Personen jedesmal von einander entfernt?

Antwort. Die Geschwindigkeit von B ist = 1,492. Nach 5 Minuten beträgt die Entfernung beider 656 Fuß. Die Geschwindigkeit von A wird hierauf 1,889 und die Entfernung beider beträgt zuletzt 1811 Fuß.

16. Aus zwei Punkten A und B, deren Entfernung = m Fuß ist, bewegen sich zwei Punkte P und p, jeder gleichförmig, und zwar P mit der Geschwindigkeit a und in einer Richtung, welche mit AB den Winkel φ bildet. Mit welcher Geschwindigkeit muß sich der Punkt p bewegen, damit beide rechtwinkelig zusammentreffen, und nach wie viel Secunden wird dieses geschehen?

Antwort. Nach $\frac{m \operatorname{Cos.} \varphi}{a}$ Secunden und p bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $= a \operatorname{Tang.} \varphi$.

Beispiel. Wenn $\varphi = 60$, $a = 3$, $m = 100$ ist, so ist die Geschwindigkeit von $p = 5{,}196$; und nach 16,66 Secunden werden beide zusammentreffen.

17. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels liegen zwei Punkte A und B, und zwar ist A von der Spitze des Winkels um m und B auf dem andern Schenkel um n Fuß entfernt. Der Punkt A bewegt sich auf seinem Schenkel mit einer Geschwindigkeit = a gleichförmig. Welchen Winkel φ muß die Richtung des Punktes B mit dem zweiten Schenkel machen, wenn derselbe bei gleichförmiger geradliniger Bewegung mit der Geschwindigkeit b den Punkt A treffen soll, und nach welcher Zeit werden beide Punkte zusammentreffen?

Antwort. Es ist φ durch die Gleichung $\operatorname{Sin.} (\varphi - \alpha) = \frac{an \operatorname{Sin.} \alpha}{bm}$ bestimmt, wenn $\frac{n}{m} = \operatorname{Cotang.} \alpha$ ist, und die Zeit x wird aus $x = \frac{n}{b \operatorname{Cos.} \varphi}$ erhalten.

Beispiel. Es sei $m = 20$, $n = 80$, $a = 3$, $b = 5$, so ist $\varphi = 49^\circ\, 34'\, 35''$ und $x = 24{,}7$.

18. Mit welcher Geschwindigkeit muß sich ein Punkt bewegen, wenn er die Sehne des rechten Winkels in derselben Zeit durchlaufen will, in welcher ein anderer Punkt den zugehörigen Kreisbogen mit der Geschwindigkeit a durchläuft?

Antwort. Es ist $x = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}$.

19. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels liegt ein Punkt, welcher von denselben um a und b Fuß entfernt ist. Unter welchem Winkel φ muß eine Gerade durch den Punkt gelegt werden, damit ein Dreieck von bestimmter Fläche F abgeschnitten wird?

Antwort. Die Gerade muß mit dem Schenkel, von welchem der gegebene Punkt b Fuß entfernt ist, einen Winkel bilden, welcher durch die Gleichung

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{F - ab \pm \sqrt{F^2 - 2abF}}{a^2}$$

bestimmt ist.

Beispiel. Wenn a = 4, b = 6, F = 60, so ist φ = 75° 42′ 40″,09 oder φ = 29° 48′ 37″,03.

20. Zwischen die Schenkel eines rechten Winkels ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, von welchem zwei Ecken auf den Schenkeln, und dessen drittes Eck in einem Punkte liegt, welcher von den Schenkeln um a und b Fuß entfernt ist.

Antwort. Der Schenkel, von welchem der Punkt um a Fuß entfernt ist, macht mit der Dreiecksseite, deren Endpunkte in diesem Schenkel und im gegebenen Punkte liegen, einen Winkel φ, welcher durch

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{a}{2b - a\sqrt{3}}$$

bestimmt ist.

21. In ein (in C) rechtwinkeliges Dreieck ABC einen Rhombus einzubeschreiben, dessen Seiten einen Winkel α einschließen.

Antwort. Die Seite des Rhombus ist bestimmt durch

$$x = \frac{a \text{ Sin. } B}{\text{Sin. } \alpha + \text{Sin. } B \text{ Cos. } B}$$

und geht durch einen Punkt der Kathete a in einer Entfernung y von der Spitze des rechten Winkels, so daß

$$y = \frac{a \text{ Sin. } B \text{ Cos. } B}{\text{Sin. } \alpha + \text{Sin. } B \text{ Cos. } B}.$$

22. Aus einer Ecke D des Rechtecks ABCD eine Gerade, welche BC schneidet, so zu ziehen, daß über der Verlängerung von AB ein Dreieck gebildet wird, dessen Inhalt dem Rechtecke gleich ist.

Antwort. Die Verlängerung der Seite BC ist $= a(1 + \sqrt{3})$. Der Neigungswinkel der gesuchten Geraden gegen die Seite AB ist bestimmt durch

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{b(2 - \sqrt{3})}{a},$$

wo $AB = a$, $BC = b$ ist.

23. Im rechtwinkeligen Dreiecke ABC ist aus der Spitze des rechten Winkels eine Transversale t gezogen, welche mit der Kathete a den spitzen Winkel φ macht. Die Länge dieser Transversale zu bestimmen.

Antwort. Wenn c die Hypotenuse ist, so ist

$$t = \frac{c \text{ Sin. } A \text{ Cos. } A}{\text{Sin. } (B + \varphi)}.$$

24. Im rechtwinkeligen Dreiecke ABC sei die Summe der beiden Katheten 259', die Summe der Hypotenuse und der dem Winkel A gegenüberliegenden Kathete sei $= 310'$, wie groß ist jede Seite und jeder Winkel?

Antwort. Es ist $A = 43^\circ\ 48'\ 52'',25$; $B = 46^\circ\ 11'\ 7'',75$; $a = 126,82$; $b = 132,18$; $c = 183,18$.

---

25. Im gleichschenkeligen Dreiecke ist die Summe von Schenkel und Grundlinie und der der letztern gegenüberliegende Winkel gegeben. Die einzelnen Stücke des Dreiecks zu bestimmen.

Antwort. Wenn die Summe von Schenkel und Grundlinie mit m und der Gegenwinkel der letztern mit A bezeichnet wird,

$$\text{so ist jeder Schenkel} = \frac{m}{1 + 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A}$$

$$\text{und die Grundlinie} = \frac{2m \text{ Sin. } \frac{1}{2} A}{1 + 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A}.$$

26. Es sei gegeben: Umfang U und der Winkel A an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks; die übrigen Stücke zu bestimmen.

Antwort. Jeder Schenkel ist $= \frac{U}{4 \text{ Sin. } (45 + \frac{1}{4} A)^2}$;

die Grundlinie $= \frac{U \text{ Sin. } \frac{1}{2} A}{2 \text{ Sin. } (45 + \frac{1}{4} A)^2}$.

27. Ein Winkel an der Grundlinie sei 42° 18′ und der Umfang 2714 Fuß; welche Dimensionen haben die einzelnen Seiten?

Antwort. Jeder Schenkel ist = 780,05; die Grundlinie 1153,9.

28. Der Mittelpunkt einer Kugel ist vom Auge 274,3 Fuß entfernt und dieselbe erscheint unter einem Winkel von 6° 18′ 40″; wie groß ist ihr Durchmesser?

Antwort. 28,182.

29. Im gleichschenkeligen Dreiecke sei die zur Grundlinie gehörige Höhe 48 Fuß; die Höhe auf einem Schenkel 36′; die übrigen Stücke zu bestimmen.

Antwort. Jeder Winkel an der Grundlinie ist 67° 58′ 32″,51; der Winkel an der Spitze 44° 2′ 55″,98; ein Schenkel = 51,778; die Grundlinie 38,834 Fuß.

30. Die Differenz zwischen einem Schenkel und der Grundlinie sei 68,75 und die Differenz der Gegenwinkel 12° 9′ 30″; die einzelnen Dreiecksstücke zu bestimmen.

Antwort. Es ist jeder Winkel an der Grundlinie = 64° 3′ 10″; der Winkel an der Spitze = 51° 53′ 40″; jeder Schenkel = 550,378; die Grundlinie = 481,617.

31. Wenn in der vorigen Aufgabe die Differenz der Seiten mit δ, die Differenz der Winkel mit D bezeichnet wird; durch welche Gleichung wird der Schenkel b gefunden?

Antwort. Man erhält $b = \frac{\delta \text{ Cos. } \frac{1}{2} B}{\text{Sin. } \frac{1}{2} D}$, woraus die übrigen Stücke leicht gefunden werden können, weil sämmtliche Winkel bekannt sind.

32. Aus der Summe von einem Schenkel und der Grundlinie und Differenz der Gegenwinkel die übrigen Stücke zu finden.

Antwort. Wenn die Summe der beiden Seiten mit **S**, die Differenz der Winkel mit **D** bezeichnet wird, so ist

$$\text{jeder Schenkel} = \frac{S \text{ Sin. } (30 + \frac{1}{6} D)}{\text{Cos. } \frac{1}{2} D} \text{ und}$$

$$\text{die Grundlinie} = \frac{2 S \text{ Sin. } (30 + \frac{1}{6} D) \text{ Sin. } (30 - \frac{1}{3} D)}{\text{Cos. } \frac{1}{2} D}.$$

33. Es sei in der vorigen Aufgabe $S = 4782$; $D = 14^\circ\ 14'\ 16''$, wie lang sind die Schenkel und die Grundlinie?

Antwort. Jeder Schenkel ist $= 2580{,}31$; die Grundlinie $= 2201{,}69'$.

34. Wenn im gleichschenkeligen Dreiecke **ABC** die drei Winkel halbirt werden, die Längen der Halbirungslinien durch die Grundlinie **c** und den ihr anliegenden Winkel **A** auszudrücken.

Antwort. Die Halbirungslinie, welche die Grundlinie schneidet, ist durch $\frac{c}{2}$ Tang. A und jede der beiden andern durch $\frac{c \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } \frac{3}{2} A}$ ausgedrückt.

35. Werden die drei Durchschnittspunkte dieser Transversalen mit den Gegenseiten durch Gerade verbunden, so wird ein Dreieck gebildet. Den Inhalt **F** desselben zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $F = \frac{1}{2} \frac{c^2 \text{ Sin.}^2 \frac{1}{2} A \text{ Sin. } A}{\text{Sin.}^2 \frac{3}{2} A}$.

36. Wenn $c = 1$ und $A = 72^\circ$ ist, den Inhalt der drei Vierecke, welche an den Ecken des gleichschenkeligen Dreiecks durch dieselben Transversalen gebildet werden, zu bestimmen.

Antwort. Das Viereck, welches der Grundlinie **c** gegenüberliegt, hat zum Inhalt $F = 0{,}3632713$ und für jedes der beiden andern Vierecke ist $F = 0{,}2030748$.

37. Wenn aus den Endpunkten der Grundlinie **AB** eines gleichschenkeligen Dreiecks zwei Transversalen so gezogen werden,

daß sie mit derselben gleiche Winkel α bilden, die Längen derselben, die Abschnitte der Schenkel und die Stücke, in welche die eine von der andern getheilt wird, ebenfalls durch die Grundlinie c und den ihr anliegenden Winkel A zu bestimmen.

Antwort. Wenn die durch A gelegte Transversale den Schenkel BC in N trifft und von der durch B gehenden in O geschnitten wird, so ist

$$AN = \frac{c \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } (A + \alpha)}; \; CN = \frac{c \text{ Sin. } (A - \alpha)}{2 \text{ Sin. } (A + \alpha) \text{ Cos. } A};$$

$$BN = \frac{c \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (A + \alpha)}; \; AO = \frac{c}{2 \text{ Cos. } \alpha};$$

$$NO = \frac{c \text{ Sin. } (A - \alpha)}{2 \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } (A + \alpha)}.$$

---

38. In einem ungleichseitigen Dreiecke sei die Summe S zweier Seiten a und b, die Differenz δ der Gegenwinkel und der Winkel C, welcher der dritten Seite c gegenüberliegt, gegeben; sämmtliche Stücke des Dreiecks zu finden.

Antwort. Man erhält $c = \frac{S \text{ Sin. } \frac{1}{2} C}{\text{Cos. } \frac{1}{2} \delta}$ und $a - b = S \text{ Tang. } \frac{1}{2} C \text{ Tang. } \frac{1}{2} \delta$.

Aus letzterer Gleichung, in Verbindung mit $a + b = S$, können die Seiten bestimmt werden.

39. Wenn die Differenz zweier Seiten a und b, 26,43'; die Seite c = 192' und die Summe der Winkel B und C 104° 19' beträgt, die sämmtlichen Stücke zu finden.

Antwort. Man findet den Winkel C durch die Gleichung

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} C = \frac{d + c \text{ Cos. } A}{c \text{ Sin. } A},$$ wo $d = a - b$. Man erhält $A = 75^\circ\ 41'$; $B = 60^\circ\ 59'$; $C = 43^\circ\ 20'$; $a = 271{,}096$; $b = 244{,}666$.

40. Gegeben seien: zwei Seiten b und c und die Differenz der Gegenwinkel.

Antwort. Man findet Tang. $\frac{1}{2}A = \frac{b-c}{b+c}$ Cotang. $\frac{1}{2}(B-C)$, woraus die übrigen Stücke leicht gefunden werden können.

41. Aus einer Seite b, anliegendem Winkel A und Summe S der beiden andern Seiten die übrigen Stücke zu finden.

Antwort. Man findet Cotang. $\frac{1}{2}C = \frac{S+b}{S-b}$ Tang. $\frac{1}{2}A$.

42. Wenn die Differenz d zweier Seiten a und c, die Seite b und ein anliegender Winkel A gegeben ist; die übrigen Stücke zu finden.

Antwort. Man erhält Tang. $\frac{1}{2}C = \frac{b-d}{b+d}$ Tang. $\frac{1}{2}A$.

43. Aus dem Umfang U und den Winkeln des Dreiecks ABC die Seiten zu finden.

Antwort. Man erhält $a = \frac{U \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } A + \text{Sin. } B + \text{Sin. } C}$

$= \frac{U \text{ Sin. } \frac{1}{2}A}{2 \text{ Cos. } \frac{1}{2}B \text{ Cos. } \frac{1}{2}C}$ und analog die übrigen Seiten.

44. Aus den Winkeln A, B, C und der Differenz d zweier Seiten c und b die Seiten zu finden.

Antwort. Man erhält

$$c + b = d \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2}A \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2}(B - C).$$

Weil $c - b = d$ ist, so kann hieraus c und b gefunden werden.

45. Es sei gegeben: die Summe zweier Seiten b und c, die dritte Seite a und der Gegenwinkel A; die übrigen Stücke zu finden.

Antwort. Man erhält, wenn $b + c = S$ ist,

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{S \text{ Sin. } \frac{1}{2}A}{a}.$$

Weil $\frac{1}{2}(B + C) = 90^\circ - \frac{1}{2}A$, so kann hieraus B und C gefunden werden.

46. Wenn eine Seite a, zugehörige Höhe h und Gegenwinkel A gegeben ist, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Antwort. Bezeichnet man den zwischen der Höhe h und der Seite c liegenden Theil des Winkels A mit φ, so erhält man leicht $\frac{a}{h} = \text{Tang. } \varphi + \text{Tang. } (A - \varphi) = \frac{\text{Sin. } A}{\text{Cos. } \varphi \text{ Cos. } (A - \varphi)}$; verwandelt man das Produkt im Nenner in eine Summe, so erhält man

$$\text{Cos. } (2\varphi - A) = \frac{2h \text{ Sin. } A - a \text{ Cos. } A}{a}.$$

Sind auf diese Weise die Theile des Winkels A gefunden, so erhält man die übrigen Stücke sehr leicht.

47. Aus Umfang U, einem Winkel A und der Höhe h, welche aus diesem Winkel gefällt ist, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Antwort. Man erhält

$$a = \frac{U^2 \text{ Sin. } A}{2 (U \text{ Sin. } A + h \text{ Cos. } A + h)}$$
$$= \frac{U^2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A}{2 (h \text{ Cos. } \frac{1}{2} A + U \text{ Sin. } \frac{1}{2} A)}.$$

Setzt man $\frac{h}{U} = \text{Tang. } \alpha$, so erhält man

$$a = \frac{U \text{ Sin. } \frac{1}{2} A \text{ Cos. } \alpha}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \frac{1}{2} A)}.$$

Nachdem a gefunden ist, kann man, wie in der vorhergehenden Aufgabe, weiter fahren, oder mittelst der Formel (§. 6, 6) die Differenz B — C bestimmen.

48. Wenn in der vorhergehenden Aufgabe U = 900′, A = 48°, h = 268′ ist, wie ergeben sich die einzelnen Dreiecksstücke?

Antwort. Man findet a = 269,652; b = 360,896; c = 269,453; B = 84° 2′ 49″,42; C = 47° 57′ 10″,58.

49. Aus dem Inhalte F und den Winkeln A, B, C die Seiten des Dreiecks zu bestimmen.

Antwort. Man erhält

$$a = \sqrt{\frac{2F \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}}; \quad b = \sqrt{\frac{2F \text{ Sin. } B}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } C}};$$

$$c = \sqrt{\frac{2F \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } B}}.$$

50. Das Verhältniß zweier Seiten, der von denselben eingeschlossene Winkel und die dritte Seite ist gegeben; die übrigen Stücke zu bestimmen.

Antwort. Wenn $b : c = n : m$, so ist $b^2 = \frac{n^2 a^2}{m^2 + n^2 - 2mn \text{ Cos. } A}$;

$$c^2 = \frac{m^2 a^2}{m^2 + n^2 - 2mn \text{ Cos. } A}.$$

51. Das Verhältniß der Seiten a und c sei wie 9 : 16; die Seite $b = 42'$; der Winkel $A = 20° \; 19' \; 32''$; die übrigen Stücke zu bestimmen.

Antwort. Es ist $a = 17{,}117$; $c = 30{,}431$; $B = 121° \; 32' \; 21'',58$; $C = 38° \; 8' \; 6'',42$.

52. Aus einer Dreiecksspitze A sei eine Senkrechte AD auf die Gegenseite a gefällt, welche in die Abschnitte BD und DC getheilt wird. Wenn das Verhältniß dieser Abschnitte BD und DC wie m zu n, ein anliegender Winkel B und die Summe der beiden andern Seiten gegeben ist, die sämmtlichen Dreiecksstücke hieraus zu finden.

Antwort. Es ist die Seite AB bestimmt durch

$$AB = \frac{m^2 S - mS \sqrt{m^2 \text{ Sin.}^2 B + n^2 \text{ Cos.}^2 B}}{(m^2 - n^2) \text{ Cos.}^2 B};$$

$$AC = \frac{-S(m^2 \text{Sin.}^2 B + n^2 \text{Cos.}^2 B) + mS\sqrt{m^2 \text{Sin.}^2 B + n^2 \text{Cos.}^2 B}}{(m+n)(m-n) \text{ Cos.}^2 B};$$

$$BC = \frac{mS - S\sqrt{m^2 \text{ Sin.}^2 B + n^2 \text{ Cos.}^2 B}}{(m-n) \text{ Cos. } B}.$$

53. Wenn $\text{Cos.}^2 a + \text{Cos.}^2 b + \text{Cos.}^2 c = 1$, die spitzen Winkel zu bestimmen, für welche $\text{Sin. } a : \text{Sin. } b : \text{Sin. } c = 6 : 7 : 8$ ist.

Antwort. Es findet sich $a = 44^\circ\ 2'$; $b = 54^\circ\ 11'$; $c = 67^\circ\ 37'$.

54. Durch den Inhalt F, Umfang U und einen Winkel A die übrigen Stücke des Dreiecks ABC zu finden.

Antwort. Man erhält $a = \frac{U^2 - 4F\ \text{Cotang. } \frac{1}{2}A}{2U}$; für die Seiten b und c erhält man die Gleichungen $b + c = U - a$ und $bc = \frac{2F}{\text{Sin. } A}$.

55. Auf den Schenkeln eines Winkels C sind von der Spitze aus zwei Stücke, welche bezüglich a und b Fuß lang sind, abgeschnitten. Durch die Spitze C eine Gerade zu ziehen, so daß, wenn man einen beliebigen Punkt derselben mit den Endpunkten der Längen a und b verbindet, gleiche Dreiecke entstehen.

Antwort. Bezeichnet man den Winkel, welchen die verlangte Gerade mit dem Schenkel, auf welchem die Länge a abgeschnitten wurde, durch φ, so ist

$$\text{Cotang. } \varphi = \frac{a + b\ \text{Cos. } C}{b\ \text{Sin. } C}.$$

56. Die Länge einer Geraden zu bestimmen, welche durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels liegenden Punkt geht und mit dem einen Schenkel einen Winkel β bildet; wenn der Punkt seiner Lage nach durch zwei Parallelen mit den Schenkeln bestimmt ist, von denen die eine die Länge a, die andere die Länge b hat.

Antwort. Wenn der Winkel β nach derselben Seite hin, wie der Winkel A, genommen wird, so erhält man als Länge der Geraden den Ausdruck

$$\frac{\left(a\ \text{Sin. } \beta + b\ \text{Sin. } (\beta - A)\right)\ \text{Sin. } A}{\text{Sin. } \beta\ \text{Sin. } (\beta - A)}.$$

57. Wenn der Punkt durch seine senkrechten Entfernungen **a** und **b** von den Schenkeln des Winkels bestimmt ist; wie drückt sich dann die Länge derselben Geraden aus?

Antwort. Man erhält als Länge $\frac{a \text{ Sin. } \beta + b \text{ Sin. } (\beta - A)}{\text{Sin. } \beta \text{ Sin. } (\beta - A)}$.

Wie folgt letzterer Ausdruck sogleich aus dem Vorhergehenden?

58. Wenn Alles bleibt, wie in Nr. 56; den Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks zu bestimmen.

Antwort. Man erhält

$$\triangle = \tfrac{1}{2} \frac{\left(a \text{ Sin. } \beta + b \text{ Sin. } (\beta - A)\right)^2 \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } \beta \text{ Sin. } (\beta - A)}.$$

59. Zwischen die Schenkel eines Winkels **A** eine Gerade, deren Länge = m Fuß ist, so zu legen, daß ein Dreieck von gegebener Fläche **F** abgeschnitten wird.

Antwort. Der Winkel φ, welchen die Gerade m mit dem einen Schenkel macht, ist bestimmt durch

$$\text{Cos. } (A + 2\varphi) = \frac{m^2 \text{ Cos. } A - 4F \text{ Sin. } A}{m^2}.$$

60. Wenn in einem Dreiecke **ABC** die Höhen h, h′, h″, welche aus den Ecken **A**, **B**, **C** auf die Gegenseiten **a**, **b**, **c** gefällt sind, gegeben sind; die Winkel des Dreiecks zu bestimmen.

Antwort. Es ist

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{(hh' + hh'' + h'h'')(hh' + hh'' - h'h'')}{h'h''}};$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{(hh' + h'h'' - hh'')(hh'' + h'h'' - hh')}{h'h''}}.$$

Analoge Relationen erhält man für die übrigen Winkel.

61. Aus den Winkeln **A**, **B**, **C** eines Dreiecks und den Entfernungen m, m′, m″ der drei Seiten **a**, **b**, **c** von einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte, die Seiten selbst zu finden.

Antwort. Man erhält

$$a = \frac{S}{\text{Sin. B Sin. C}};\ b = \frac{S}{\text{Sin. A Sin. C}};\ c = \frac{S}{\text{Sin. A Sin. B}};$$

wo $S = m\ \text{Sin. A} + m'\ \text{Sin. B} + m''\ \text{Sin. C}$ ist.

Wie ändern sich diese Formeln, wenn der gegebene Punkt außerhalb des Dreiecks im Winkelraume A oder in seinem Scheitelwinkel liegt?

62. Wenn einem Dreiecke **DEF** ein ähnliches Dreieck **ABC** einbeschrieben ist, das Verhältniß ihrer Flächen zu finden.

Antwort. Es verhält sich das umbeschriebene Dreieck zum einbeschriebenen, wie $4\ \text{Cos.}^2\varphi : 1$, wo φ der Winkel ist, welchen zwei homologe Seiten mit einander bilden. Denn wenn **AC** mit **DF**, **AB** mit **ED** und **BC** mit **FE** den Winkel φ bilden, so erhält man, wenn die Winkel **A**, **B**, **C** des einbeschriebenen Dreiecks mit α, β, γ bezeichnet werden,

$$\frac{BCD}{ABC} = \frac{\text{Sin.}\ (\gamma - \varphi)\ \text{Sin.}\ (\beta + \varphi)}{\text{Sin.}\ \gamma\ \text{Sin.}\ \beta};$$

$$\frac{ACE}{ABC} = \frac{\text{Sin.}\ (\alpha - \varphi)\ \text{Sin.}\ (\gamma + \varphi)}{\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \gamma};$$

$$\frac{ABF}{ABC} = \frac{\text{Sin.}\ (\alpha + \varphi)\ \text{Sin.}\ (\beta - \varphi)}{\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \beta}.$$

Hieraus erhält man $\frac{DEF}{ABC} = \Big(\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \gamma + \text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}(\gamma-\varphi)\ \text{Sin.}(\beta+\varphi) + \text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\gamma+\varphi)\ \text{Sin.}(\alpha-\varphi) + \text{Sin.}\ \gamma\ \text{Sin.}\ (\alpha+\varphi)\ \text{Sin.}\ (\beta-\varphi)\Big) : \text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\beta\ \text{Sin.}\gamma$

oder $\frac{DEF}{ABC} = \Big(\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}\gamma + 3\text{Cos.}^2\varphi\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}\gamma - \text{Sin.}^2\varphi\ (\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \beta\ \text{Cos.}\ \gamma + \text{Sin.}\ \beta\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \gamma + \text{Sin.}\ \gamma\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \beta)\Big) : \text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \gamma.$

Weil nun auch $\text{Sin.}\ (\alpha+\beta+\gamma) = 0 = \text{Sin.}\alpha\,\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}\gamma + \text{Sin.}\beta\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\gamma + \text{Sin.}\gamma\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\beta - \text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}\gamma$, so erhält man $\frac{DEF}{ABC} = \frac{4\ \text{Cos.}^2\varphi}{1}$.

Folglich verhalten sich auch die Umfange derselben ähnlichen Dreiecke wie $2 \text{Cos.} \varphi : 1$. —

63. In einem Dreiecke ABC den Punkt O zu finden, aus welchem die drei Seiten unter gleichem Winkel erscheinen.

Antwort. Wenn der Winkel, welcher von der Linie OA und der Dreiecksseite c gebildet wird, durch φ bezeichnet wird, so erhält man denselben durch die Gleichung

$$\text{Sin. } C \text{ Sin. } (60 - \varphi) = \text{Sin. } B \text{ Sin. } \big(60 - (A - \varphi)\big).$$

Die Linie OA ist $= \frac{2}{3} c \text{ Sin. } (60 - \varphi) \sqrt{3}$.

64. Zwischen die Schenkel eines Winkels A eine Gerade von bestimmter Länge m so zu legen, daß das Rechteck aus den Abschnitten der Schenkel einen gegebenen Inhalt F hat.

Antwort. Man erhält für die Abschnitte der Schenkel die Ausdrücke

$$\frac{\sqrt{m^2 + 4F \text{ Cos.}^2 \frac{1}{2}A} - \sqrt{m^2 - 4F \text{ Sin.}^2 \frac{1}{2}A}}{2}.$$

65. Drei Punkte A, B, C sind der Lage nach gegeben; einen vierten Punkt D zu suchen, von welchem aus $AB = c$ unter dem Winkel γ und BC unter dem Winkel $= \alpha$ erscheint.

Antwort. Bezeichnet man den Winkel ABC mit B, und den Winkel, welchen die Gesichtslinie AD mit AC bildet, mit φ, so erhält man, wenn $BC = a$,

$$\text{Cotang. } (A + \varphi) = -\frac{c \text{ Sin. } \alpha + a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } (\alpha + \gamma + B)}{a \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } (\alpha + \gamma + B)}.$$

66. Wenn in vorhergehender Aufgabe $c = 1472'$; $a = 2721'$; $\gamma = 42^\circ$; $\alpha = 54^\circ$; $B = 122^\circ$ ist; die sämmtlichen Stücke, welche den Punkt D bestimmen, zu berechnen.

Antwort. Man erhält $\varphi = 63^\circ 53' 51'',61$; $A = 38^\circ 22' 33'',04$; $BD = 2149,59$.

67. Den Inhalt eines Kreisabschnitts zu finden, wenn der Halbmesser des Kreises $= r$ und der Mittelpunktswinkel $= \varphi$ ist. Man erhält

$$F = r^2 \left(\frac{\varphi \pi}{360} - \frac{1}{2} \text{Sin. } \varphi\right) \text{ oder } \frac{1}{2} r^2 (\text{Bogen } \varphi - \text{Sin. } \varphi).$$

Beispiel. Der Kreisabschnitt in einem Quadranten für den Halbmesser 1 ist 0,2853982; für einen Winkel von 60° und Halbmesser = 3 ist derselbe 0,8152749.

68. Wenn in einem Kreise, dessen Halbmesser = r ist, aus einem Punkte des Umfangs zwei Sehnen a und b gezogen sind; den von ihnen eingeschlossenen Peripheriewinkel zu bestimmen.

Antwort. Wird dieser Winkel mit C bezeichnet, so ist

$$\text{Cos. } C = \frac{ab \pm \sqrt{(2r+a)(2r-a)(2r+b)(2r-b)}}{4r^2}.$$

69. Es seien im Kreise zwei parallele Sehnen 2a und 2b und ihre Entfernung h gegeben; den Halbmesser des Kreises, die Länge jedes zwischenliegenden Kreisbogens und den Inhalt des von den Sehnen und zwischenliegenden Kreisbögen begrenzten Flächenraumes zu finden.

Antwort. Es ist $r = \frac{\sqrt{(b^2-a^2-h^2)^2+4b^2h^2}}{2h}$.

Der zwischen den Sehnen liegende Bogen ist bestimmt durch

$$\varphi = \text{Arc. Sin.} = \frac{h\sqrt{h^2+(b-a)^2}}{\sqrt{(b^2-a^2-h^2)^2+4b^2h^2}}.$$

Den Inhalt findet man am bequemsten, wenn man die zu a und b gehörigen Mittelpunktswinkel berechnet, und mit ihnen in die Formel Nr. 67 übergeht.

Beispiel. Es sei b = 4, a = 3, h = 2, so ist r = 4,0697. Länge des Bogens 2,265214.

70. Die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise sei 6, die Halbmesser derselben 4 und 5; den Inhalt des gemeinschaftlichen Bogenzweiecks anzugeben.

Antwort. 18,374.

71. Es berühren sich drei Kreise, deren Halbmesser 8, 9, 10 sind, gegenseitig; die Fläche des von ihnen eingeschlossenen Bogendreiecks zu berechnen.

Antwort. Man erhält 12,88 . . . .

72. An einen Kreis, dessen Halbmesser $= r$, ist eine Tangente gezogen; aus einem Punkte derselben, welcher vom Berührungspunkt um m Längen Einheiten entfernt ist, eine Gerade durch den Kreis so zu ziehen, daß ein Kreisabschnitt gebildet wird, welcher einen gegebenen Winkel α faßt.

Antwort. Bezeichnet man den Winkel, welchen die verlangte Gerade mit der durch den gegebenen Punkt gehenden Centrallinie bildet, mit φ, so ist

$$\text{Sin. } \varphi = \frac{r \text{ Cos. } \alpha}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

und das außerhalb des Kreises liegende Stück x der verlangten Geraden ist durch die Gleichung

$$m^2 = x\,(x + 2r \text{ Sin. } \alpha)$$

bestimmt.

73. Aus den Winkeln eines Dreiecks und dem Halbmesser des innern Berührungskreises die Fläche des Dreiecks zu bestimmen.

Antwort. Man erhält

$$F = r^2 \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2} A \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2} B \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2} C.$$

74. Wie ändert sich dieser Ausdruck, wenn statt des Radius des innern Berührungskreises der Halbmesser eines äußern, z. B. ϱ', dessen Kreis die Seite a des Dreiecks berührt, gegeben ist?

Antwort. Man erhält

$$F = \varrho'^2 \text{ Cotang. } \tfrac{1}{2} A \text{ Tang. } \tfrac{1}{2} B \text{ Tang. } \tfrac{1}{2} C.$$

75. Wenn in einen Kreisabschnitt vom Radius **R**, dessen Mittelpunktswinkel $= \alpha$ gesetzt ist, ein Kreis beschrieben ist, welcher beide Halbmesser und den Bogen des gegebenen Kreisabschnitts berührt; den Radius x dieses Berührungskreises zu bestimmen.

Antwort. Man erhält

$$x = R \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}\alpha \text{ Tang. } (45 - \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Beispiel. Es sei $\alpha = 40$; $R = 3$; so ist $x = 0{,}764564\ldots$

76. Es seien die drei Winkel eines Dreiecks ABC gegeben und die Entfernung der Winkelspitzen A, B, C von einem gegebenen Punkte D, das Dreieck zu bestimmen.

Auflösung. Es sei $BD = d$; $AD = e$; $CD = f$; W. $BAD = \varphi$; $CAD = \psi$.

Weil $A = \varphi + \psi$, so erhält man aus

$$\text{Sin.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\psi = \text{Cos.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,\psi - \text{Cos.}\,A,$$

indem man quadrirt,

$$1 + 2\,\text{Cos.}\,\varphi\,\text{Cos.}\,\psi\,\text{Cos.}\,A = \text{Cos.}^2 A + \text{Cos.}^2\psi + \text{Cos.}^2\varphi.$$

Bezeichnet man AB mit z, AC mit y, so erhält man

$$\text{Cos.}\,\varphi = \frac{z^2 + e^2 - d^2}{2ze}, \text{ und weil } y = \frac{z\ \text{Sin.}\,B}{\text{Sin.}\,C} \text{ ist,}$$

$$\text{Cos.}\,\psi = \frac{(e^2 - f^2)\ \text{Sin.}^2 C + z^2\ \text{Sin.}^2 B}{2ze\ \text{Sin.}\,B\ \text{Sin.}\,C}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man die Gleichung

$$z^4\ \text{Sin.}^2 A\ \text{Sin.}^2 B - 2z \Big[\text{Sin.}^2 B\ \text{Sin.}^2 C\,(d^2 + f^2) + \text{Sin.}\,B\ \text{Sin.}\,C\ \text{Cos.}\,A \Big(\text{Sin.}^2 C\,(e^2 - f^2) + \text{Sin.}^2 B\,(e^2 - d^2)\Big) - 2\,\text{Cos.}\,A\ \text{Sin.}^2 B\ \text{Sin.}^2 C\,.\,e^2\Big] = 2\ \text{Sin.}\,B\ \text{Sin.}^2 C\ \text{Cos.}\,A\,(e^2 - d^2)\,(e^2 - f^2) - (e^2 - d^2)\ \text{Sin.}^2 B\ \text{Sin.}^2 C - (e^2 - f^2)^2\ \text{Sin.}^4 C,$$

woraus sich die Seite z ergibt.

Beispiel. Es sei $d = 120$; $e = 160$; $f = 140$; $A = 70°$; $B = 60°$; $C = 50°$; so ist $AB = 209$ oder $41{,}9$, woraus die übrigen Stücke gerechnet werden können.

77. Es sei ein Viereck ABCD mit seinen Diagonalen BC und AD gegeben; die Relation, welche zwischen diesen sechs Größen besteht, aufzustellen.

Antwort. Es sei $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; $BD = f$; $AC = g$. — Wenn man ganz denselben Weg wie in der vorhergehenden Aufgabe einschlägt, so erhält man:

$(a^2c^4 + c^2a^4 + b^2d^4 + d^2b^4 + g^2f^4 + f^2g^4) + (a^2d^2f^2 + a^2b^2g^2 + b^2c^2f^2 + d^2c^2g^2) - (a^2b^2c^2 + a^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2f^2 + a^2c^2g^2 + a^2g^2f^2 + b^2c^2d^2 + b^2d^2g^2 + b^2d^2f^2 + c^2g^2f^2 + d^2g^2f^2 + b^2g^2f^2) = o.$

Wenn demnach von den sechs Linien, welche das Viereck bilden, fünf gegeben sind, so kann man immer die sechste durch eine quadratische Gleichung finden.

78. Im Vierecke **ABCD** sei **AB** = a = 760; **BC** = b = 864; W. **ABC** = 64° 18′; W. **BCD** = 86° 13′ und W. **CDA** = 74° 39′; die übrigen Stücke zu finden.

Antwort. Man findet **A** = 134° 50′; c = 852,567; d = 506,123.

79. Im Vierecke **ABCD** seien gegeben: die Seiten **AB** = a; **BC** = b; **CD** = c und die von den Seiten a und b, dann von b und c eingeschlossenen Winkel **B** und **C**; die übrigen Stücke zu bestimmen.

Antwort. Zieht man die Diagonale **AC**, so kann dieselbe aus dem Dreiecke **ABC** leicht berechnet werden; auch lassen sich die Winkel **BCA** und **BAC** bestimmen; ist dieses geschehen, so findet man aus dem Dreiecke **ACD** die verlangte Seite d, den Winkel **D** und den Winkel **CAD**, welcher mit dem bereits gefundenen **CAB** den Winkel **A** bildet.

Auch findet man d =

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab\,\mathrm{Cos.}B+2bc\,\mathrm{Cos.}C+2ac\,\mathrm{Cos.}(B+C)}.$$

80. Es sei a = 1044′; b = 1543′; c = 1852′; **B** = 109° 50′; **C** = 36° 24′; die übrigen Stücke zu finden.

Antwort. Die vierte Seite d ist = 423,032′; W. **D** = 106° 31′ 6″,01; W. **A** = 107° 14′ 53″,98.

III.
Räumliche Geometrie.

Vorbemerkung. So wie in der Geometrie der Ebene jedem Satze, der sich auf Lage von Linien und Punkten (ohne alle Rücksicht auf Größe) bezieht, ein anderer zur Seite steht, welcher sich aus demselben leicht herleiten läßt, wenn man Punkt und Gerade vertauscht, so ist dies in der räumlichen Geometrie ebenso der Fall, wenn man Punkt mit Ebene vertauscht, während der Geraden die Gerade selbst gegenübersteht. So wie man ferner unter „Strahlenbüschel" den Inbegriff aller Linien, welche in einerlei Ebene liegen, und durch denselben Punkt (Mittelpunkt) gehen, versteht, so hat man sich unter „Strahlenbündel" den Inbegriff aller Strahlen, welche durch einerlei Punkt im Raume gehen, zu denken, so daß also der Strahlenbündel unendlich viele Strahlenbüschel in sich enthält. Wird ein solcher Strahlenbündel von einer Ebene geschnitten, so erhält man in derselben ein System von Punkten, deren jeder mit dem Strahle, welcher ihn durch seinen Schnitt mit der Ebene erzeugt, in Beziehung gesetzt werden kann, so daß also in diesem Betrachte dem Punkte ein Strahl des Strahlenbündels gegenübergesetzt werden kann. — Alle Ebenen, welche durch eine und dieselbe Gerade (Axe) gehen, bilden einen Ebenenbüschel; jeder Schnitt desselben mit einer Ebene, welche nicht durch dieselbe Axe geht, erzeugt einen Strahlenbüschel, woraus erhellet, daß auch jeder Geraden (jedem Strahle) eines Strahlenbüschels eine Ebene des Ebenenbüschels entspricht, dessen Axe durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht.

1. Durch n Punkte, von welchen nicht drei oder mehre in einerlei Geraden liegen, sind $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gerade bestimmt.

Durch n Ebenen, von welchen nicht drei oder mehre in einerlei Geraden sich schneiden, sind $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gerade bestimmt.

Denn durch 2 Punkte ist eine Gerade, durch 3 Punkte sind $1 + 2$, durch 4 Punkte $1+2+3$ u. s. w., durch n Punkte $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gerade bestimmt.

2. Durch n Punkte, von welchen nicht mehr als drei in einerlei Ebene liegen, sind $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Ebenen bestimmt. Sind unter n Punkten m in einerlei Ebene, so erhält man

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 1$$

Ebenen u. s. f.

Denn durch 3 Punkte ist 1 Ebene, durch 4 Punkte sind $1+3$, durch 5 Punkte $1+3+6$, durch 6 Punkte $1+3+6+10$ Ebenen bestimmt u. s. f.

3. Durch n Gerade, von welchen nicht zwei in einerlei Ebene liegen, und m Punkte, von welchen nicht vier in einerlei Ebene liegen, sind

$$nm + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Ebenen bestimmt.

Denn zu der in 2) erhaltenen Anzahl kommt noch die

Denn durch 2 Ebenen ist eine Gerade (ihr Schnitt), durch 3 Ebenen sind $1 + 2$, durch 4 Ebenen sind $1 + 2 + 3$ u. s. w., durch n Ebenen $1 + 2 + 3 \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gerade bestimmt.

Durch n Ebenen, von welchen nicht mehr als drei in einem Punkte sich schneiden, sind $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Punkte bestimmt. Schneiden sich unter den n Ebenen m in demselben Punkte, so erhält man

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 1$$

Punkte.

Denn durch 3 Ebenen ist 1 Punkt, durch 4 Ebenen sind $1+3$, durch 5 Ebenen $1+3+6$, durch 6 Ebenen $1+3+6+10$ Ebenen bestimmt u. s. f.

Durch n Gerade, von welchen nicht zwei in einem Punkte sich schneiden, und m Ebenen, von welchen nicht vier in einerlei Punkt sich schneiden, sind

$$mn + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Punkte bestimmt.

Denn zu der in 2) erhaltenen Anzahl kommt noch die

Anzahl der Ebenen, welche durch je einen Punkt und je eine Gerade bestimmt sind.

4. Durch zwei Gerade, welche sich schneiden, ist eine Ebene bestimmt, in welcher beide liegen.

Wenn von n Geraden immer je zwei (jede mit jeder) in einerlei Ebene liegen, so müssen sich dieselben in einem und demselben Punkte schneiden (oder parallel sein, d. h. in einem unendlich fernen Punkte sich schneiden).

Wenn n Gerade sich gegenseitig schneiden und nicht sämmtlich in einer Ebene liegen, so müssen sich dieselben in einem Punkte schneiden.

5. Durch drei Punkte ist eine Ebene bestimmt.

Die drei Geraden, welche durch die drei Punkte gehen, liegen in derselben Ebene.

Oder: Wenn zwei Gerade durch zwei verschiedene Punkte gehen (jede durch einen Punkt), sich selbst aber schneiden, so

Anzahl der Punkte, welche durch je eine Ebene und je eine Gerade bestimmt sind. (Durch eine Gerade, welche mit einer Ebene parallel ist, ist ein unendlich ferner Durchschnitt denkbar.)

Durch zwei Gerade, welche sich schneiden, ist ein Punkt bestimmt, in welchem sie sich schneiden.

Wenn n Gerade sich gegenseitig schneiden, aber nicht in einem und demselben Punkte, so müssen sie sämmtlich in einer und derselben Ebene liegen.

Durch drei Ebenen ist ein Punkt bestimmt.

Die drei Geraden, in welchen sich die drei Ebenen schneiden, gehen durch denselben Punkt.

Oder: Wenn zwei Gerade in zwei verschiedenen Ebenen liegen (jede in einer Ebene), sich selbst aber schneiden, so

geht die Ebene derselben auch durch die Gerade, welche durch die beiden Punkte bestimmt ist.

Wenn von n Geraden, welche durch einen und denselben Punkt gehen, je eine von einer Geraden eines andern aus n sich in einem von jenem Punkte verschiedenen Punkte schneidenden Geraden bestehenden Systems wieder geschnitten wird, so gehen die n Ebenen, welche durch ein jedes Paar dieser sich schneidenden Linien bestimmt werden, durch eine und dieselbe Gerade (welche durch die beiden Mittelpunkte bestimmt ist).

liegt ihr Durchschnittspunkt in der Geraden, welche durch die beiden Ebenen bestimmt ist.

Wenn von n Geraden, welche in einer und derselben Ebene liegen, je eine von einer Geraden eines andern aus n in einer von jener Ebene verschiedenen Ebene liegenden Systems von Geraden wieder geschnitten wird, so liegen die n Durchschnittspunkte, welche durch ein jedes dieser Paare sich schneidender Linien bestimmt werden, in einer und derselben Geraden (welche durch die beiden Ebenen bestimmt ist).

6. Unter Projektion eines Punktes versteht man jeden Punkt, welcher in dem durch den erstern Punkt und einen zweiten als Mittelpunkt (Projektionscentrum) angenommenen Punkte gehenden Strahle liegt. Jede begrenzte Gerade wird aus einem Mittelpunkte durch eine ebene Winkelfläche projicirt, deren Scheitel der Mittelpunkt und deren Schenkel die beiden Strahlen sind, welche durch die Endpunkte der Geraden gehen. Jede in diesem Winkel zwischen den Schenkeln (oder auch zwischen den Schenkeln seines Scheitelwinkels, welcher mit ersterem einen vollkommenen Winkel bildet) gezogene Gerade ist die Projektion der ersteren. Die Winkelfläche heißt in Bezug auf die in ihr liegende Gerade und deren Projektionen der Schein der Geraden aus der angenommenen Spitze. Jede Curve wird daher durch eine Kegelfläche (im allgemeineren Sinne) und jede begrenzte geradlinigte ebene Figur durch eine Pyramide, deren

Spitze nicht in der Ebene der Figur angenommen wird, ihr Umfang aber durch den Mantel der Pyramide projicirt.

7. In welchem Falle ist die Projektion einer Geraden ein Punkt?

8. In welchem Falle ist die Projektion einer ebenen Figur eine Gerade?

9. Ein Strahlenbüschel wird durch einen Ebenenbüschel projicirt, dessen Axe die Gerade ist, welche den Mittelpunkt des Strahlenbüschels mit dem Projektionscentrum verbindet. Jeder Schnitt des Ebenenbüschels durch eine Ebene erzeugt wieder einen Strahlenbüschel, welcher die Projektion des ersteren ist.

10. Die Projektion eines Strahlenbüschels kann ein System paralleler Linien (ein Parallelstrahlenbüschel) sein.

Beweis. Man durchschneide den projicirenden Ebenenbüschel mit einer Ebene, welche mit der Axe desselben parallel ist, so erhält man ein System paralleler Linien, deren jede die Projektion eines Strahles des Büschels ist. Es gibt daher auch unendlich viele Parallelstrahlenbüschel, welche die Projektion eines und desselben Strahlenbüschels sein können.

11. Die Projektion eines Parallelstrahlenbüschels kann ein Strahlenbüschel mit einem bestimmten Mittelpunkte sein.

Beweis. Projicirt man sämmtliche Parallelstrahlen aus einem und demselben Mittelpunkte, so erhält man einen Ebenenbüschel, dessen Achse mit sämmtlichen Parallelstrahlen ebenfalls parallel ist. Jeder Schnitt dieses Ebenenbüschels mit einer Ebene, welche mit der Axe desselben nicht parallel ist, erzeugt einen Strahlenbüschel mit bestimmtem Mittelpunkte (dem Durchschnitte der Axe mit der Projektionsebene). Es können daher unendlich viele Strahlenbüschel die Projektionen eines und desselben Parallelstrahlenbüschels sein.

12. Die Projektion einer endlichen Geraden kann wieder eine begrenzte endliche Gerade, aber auch eine aus zwei ins Unendliche laufenden Strecken (deren jede zur andern Grenze einen Endpunkt der gegebenen Linie hat) bestehende Gerade sein.

Beweis. Fig. 186. Die begrenzte Gerade CD wird durch den vollkommnen Winkel, welcher aus dem einfachen Winkel AMB und seinem Scheitelwinkel A′M′B′ besteht, aus dem Mittelpunkte M projicirt. Jeder Schnitt cd des einen dieser Winkel ist eine Projektion der Linie CD. Zieht man aber die Linie GH so, daß sie zum Theil in den beiden einfachen Winkeln AMB und A′MB′ liegt, so ist offenbar die Projektion der Geraden CD aus den beiden ins Unendliche laufenden Strecken FG und EH zusammengesetzt.

Die Projektion des Punktes C ist der Punkt F und jedem andern in der Nähe von C liegenden Punkte entspricht ein Punkt der Strecke FG. Wenn ferner der Strahl Mo mit GH parallel ist, so liegt seine Projektion im Unendlichen, während jeder zwischen o und D liegende Punkt seine Projektion in der unendlichen Strecke EH hat. Es ist daher die aus den beiden unendlichen Strecken EH, FG bestehende Gerade (mit Ausschluß der endlichen Strecke EF) die Projektion der Geraden CD. Offenbar würde ebenso die Strecke EF die Projektion der beiden unendlichen Strecken sein, welche die Gerade CD auf beiden Seiten zu einer einzigen unendlichen Geraden ergänzen. Stellt man sich den Strahl Mo alle Punkte der Linie CD durchlaufend vor, so erhellet auf einfache Weise, daß die beiden unendlich fernen Punkte einer Geraden nur als ein einziger Punkt zu betrachten sind. Ist die Linie FG mit einem Endschenkel parallel, so ist die unendliche Strecke FG allein die Projektion von CD.

Anmerkung. Man pflegt zu sagen, daß die Linie EH ins Unendliche gehe, während die Linie EHGF eine durchs Unendliche gehende Linie sei.

13. Jedes ebene Dreieck hat, wenn es mit dem Projektionscentrum nicht in einerlei Ebene liegt, zur Projektion wieder ein ebenes Dreieck oder zwei sich ergänzende ins Unendliche laufende Flächen, von denen die eine ein gewöhnlicher einfacher Winkel, die andere aber von einer endlichen Geraden und zwei aus den Endpunkten derselben ins Unendliche laufenden, divergirenden Geraden begrenzt ist; oder einen einfachen Winkel oder einen Parallelstreifen.

Beweis. Das Dreieck wird durch ein vollkommnes Dreikant projicirt, welches von drei vollkommnen ebenen Winkeln begrenzt ist. Wird nun dasselbe mit der Projektionsebene so durchschnitten, daß letztere blos durch eine der beiden einfachen Dreikante geht und jede Seitenfläche durchschneidet, so erhält man als Projektion des Dreiecks wieder ein Dreieck. — Man kann aber auch die Projektionsebene mit einer Seitenfläche des Dreikants parallel legen, wodurch man als Schnitt (Projektion des Dreiecks) einen gewöhnlichen einfachen Winkel erhält. Da die Projektion der Dreiecksseite, welche in der mit der Projektionsebene parallelen Seitenfläche des Dreikants liegt, ganz in das Unendliche fällt, so kann man auch sagen, die Projektion sei ein Dreieck, von welchem eine Seite im Unendlichen liege. — Legt man ferner die Projektionsebene mit einem eine Ecke projicirenden Strahle (einer Kante des Dreikants) parallel, so erhält man als Schnitt einen Parallelraum, welcher von einer endlichen Geraden, der Projektion der jener Ecke gegenüberliegenden Seite und zwei aus ihren Endpunkten auslaufenden parallelen Geraden eingeschlossen ist. Da letztere sich in einem unendlich fernen Punkte (der im Unendlichen liegenden Projektion der Ecke des Dreiecks) schneiden, so kann man auch sagen, daß die Projektion des Dreiecks ein Dreieck sei, von welchem die eine Spitze im Unendlichen liege. — Legt man ferner die Projektionsebene so durch das vollkommne Dreikant, daß von dem einen einfachen Dreikante zwei Kanten und von

dem andern die dritte Kante geschnitten werden, so erhält man als Projektion des Dreiecks eine Fläche (ein Dreieck), welche durch das Unendliche geht, und von welcher der erste Theil von einer endlichen Geraden und zwei aus ihren Endpunkten auslaufenden divergirenden Geraden und der andere aus einem den erstern Theil ergänzenden ebenen Winkel besteht. In Figur 187 ist M das Projektionscentrum, und das durch das Unendliche gehende Dreieck DEFHGD die Projektion des Dreiecks ABC.

14. Wenn zwei Dreiecke nicht in einerlei Ebene, aber so liegen, daß die Durchschnitte von je zweien ihrer Seiten in einer Geraden liegen, so durchschneiden sich die Verbindungslinien der Eckpunkte, welche jenen homologen Seiten gegenüberliegen, in einem und demselben Punkte.

Wenn zwei Dreiecke nicht in einerlei Ebene, aber so liegen, daß die Verbindungslinien je zweier Ecken in einem Punkte sich schneiden, so liegen die Durchschnitte je zweier Seiten, welche jenen Ecken gegenüberliegen, in einer Geraden.

Beweis des rechts stehenden Satzes.

Wenn die Verbindungslinien der drei Paare von Eckpunkten sich in einem Punkte schneiden, so ist dieser Punkt der Mittelpunkt oder das Projektionscentrum, aus welchem beide Dreiecke durch eine und dieselbe dreiseitige Pyramide projicirt werden. Weil demnach beide Dreiecke Schnitte eines und desselben Dreikants sind, also je zwei homologe Seiten ebenfalls in einer Ebene (Seitenebene des projicirenden Dreikants) liegen, so müssen ihre Durchschnitte sämmtlich in der Geraden liegen, in welcher sich die Dreiecksebenen selbst schneiden (vergl. 5).

Beweis des links stehenden Satzes.

Da sich zwei (homologe) Seiten schneiden, so liegen dieselben in einer Ebene. Durch die drei Paare homologer Seiten sind daher drei Ebenen bestimmt, welche sich in einem Punkte schneiden.

15. Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so liegen, daß die Durchschnitte je zweier (homologer) Seiten in einer Geraden liegen, so schneiden sich die Geraden, welche gegenüberliegende Eckpunkte verbinden, in einem Punkte.

Beweis. Fig. 38. Man lege durch die Gerade MPN, welche die Durchschnitte M, P, N der Seiten AB, ab; BC, bc; AC, ac enthält, eine beliebige von der Ebene der Dreiecke verschiedene Ebene. Zieht man in derselben die Gerade MA′B′ beliebig, so liegt diese mit Mab in einer Ebene und ebenso mit MAB. Auf gleiche Weise ziehe in jener Hülfsebene die Geraden PC′A′ und NC′A′ beliebig, so wird in derselben ein Dreieck A′B′C′ gebildet, welches mit abc in einem Dreikante, dessen Spitze S sei, und mit ABC in einem andern Dreikante, dessen Spitze S′ sei, liegt. Die Geraden Sa, S′A, welche sich in A′ schneiden, liegen in einerlei Ebene, in welcher auch Aa liegt. Dasselbe gilt von Bb, Cc. Diese

Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so liegen, daß die Linien, welche homologe Eckpunkte verbinden, in einem Punkte sich schneiden, so liegen die Durchschnitte der Gegenseiten in einer Geraden.

Der Beweis ist mit dem Nebenstehenden unmittelbar zusammenhängend. Denn es ist BbG eine Gerade und die Punkte B, b, G sind die Durchschnitte der Seiten des Dreiecks MaA, PcC, deren Eckpunkte verbunden den Durchschnitt N geben.

drei Ebenen haben die Axe SS′ gemeinschaftlich und werden von der Ebene der gegebenen Dreiecke ABC, abc in den Geraden Aa, Bb, Cc geschnitten, weswegen diese drei Geraden sich in einem Punkte G, dem Durchschnitte der Axe mit der Ebene der gegebenen Dreiecke, schneiden müssen.

16. Wenn zwei Dreikante einerlei Mittelpunkt haben und die drei Geraden, in denen sich homologe Flächen des einen und des andern schneiden, in einer Ebene liegen, so gehen die drei Ebenen, welche die Kanten verbinden, durch einerlei Strahl.

Wenn zwei Dreikante einerlei Mittelpunkt haben und die Ebenen, welche homologe Kanten verbinden, durch denselben Strahl gehen, so liegen die drei Strahlen, in denen sich homologe Flächen schneiden, in einerlei Ebene.

Der Beweis folgt aus der vorhergehenden Betrachtung.

17. Unter einem harmonischen Ebenenbüschel versteht man denjenigen, von welchem ein Schnitt mit einer Geraden ein harmonisches gerades Gebilde ist. Hieraus folgt: Legt man durch den Mittelpunkt eines harmonischen Strahlenbüschels eine Gerade, welche nicht mit ihm in derselben Ebene liegt, und projicirt die Strahlen desselben aus einem Punkte der Geraden, so ist der Ebenenbüschel, welchen man hierdurch erhält, ein harmonischer Ebenenbüschel. (Vergl. I, 92 u. s. f.)

Beweis. Jeder Schnitt eines harmonischen Strahlenbüschels ist ein harmonisches gerades Gebilde. Weil nun der Strahlenbüschel als Schnitt des Ebenenbüschels betrachtet werden kann, so ist das gerade Gebilde, welches ein Schnitt

des Strahlenbüschels ist, zugleich ein Schnitt des Ebenenbüschels, woraus die Behauptung folgt.

18. Ist der Durchschnitt eines Ebenenbüschels mit einer Geraden ein harmonisches gerades Gebilde, so ist jeder andere Schnitt mit einer beliebigen Geraden ebenfalls ein harmonisches gerades Gebilde.

Durch einen beliebigen Punkt der ersteren Geraden lege man eine Gerade mit der zweiten parallel. Da durch beide Gerade eine Ebene bestimmt ist, so schneidet diese den Ebenenbüschel in einem harmonischen Strahlenbüschel, weswegen die Parallele ebenfalls ein harmonisches gerades Gebilde ist. Durch letztere und die zweite gegebene Gerade, welche mit einander parallel sind, ist ein zweiter harmonischer Strahlenbüschel bestimmt und daher letztere ebenfalls ein harmonisches gerades Gebilde.

19. Denkt man sich zwei Ebenenwinkel, welche mit einander zwei rechte Winkel bilden (zwei Nebenkeile), durch Ebenen halbirt, so bilden die vier Ebenen einen harmonischen Ebenenbüschel.

20. Wird ein Ebenenwinkel durch eine dritte Ebene halbirt und zur letztern durch die gemeinschaftliche Kante eine vierte senkrecht gelegt, so bilden diese vier Ebenen einen harmonischen Ebenenbüschel.

---

21. Von den Körpern.

a) Wenn man die Anzahl aller Flächen mit F, die Anzahl aller Ecken mit E und die Anzahl aller Kanten mit K bezeichnet, so ist für jedes gewöhnliche Polyeder

$$E + F = K + 2.$$

Beweis. Man stelle sich einen Theil der Oberfläche des Polyeders (eine Schale oder Netz) vor, welche aus e Eckpunkten, f Flächen, k Kanten (Seiten) besteht, und füge an dieselbe eine neue n seitige Fläche, welche mit der Schale

n' Seiten gemein und n'' Seiten nicht gemein hat, und bezeichne mit e', f', k' die neue Anzahl der Ecken, Flächen und Seiten, so ist

$$n = n' + n''; \; f' = f + 1; \; k' = n'' + k;$$

und weil das n Eck mit der Schale n' Seiten gemein hat, so hat sie zugleich mit ihr $n' + 1$ Ecken, also auch $n'' - 1$ Ecken nicht gemein, woraus folgt, daß

$$e' = e + n'' - 1.$$

Hieraus folgt, daß

$$e' + f' - k' = e + f - k,$$

woraus folgt, daß $e + k - f$ eine constante für alle Netze geltende Größe ist.

Für eine einzige Figur ist aber immer $e + f - k = 1$ oder $e + f = k + 1$, welche Gleichung also für alle Schalen gilt. Eine solche Schale erhält man aber aus dem Polyeder, wenn man eine Fläche hinwegnimmt, in welchem Falle man die Gleichung

$$E + F - 1 = K + 1 \text{ oder}$$
$$F + F = K + 2$$

erhält; d. h. für alle Körper gewöhnlicher Art ist die Summe aus der Anzahl der Flächen und der der Ecken gleich der Anzahl der Kanten, mehr zwei.

Anmerkung. Dieser Satz, welchen man den Eulerschen Satz von den Polyedern nennt, gilt, wie aus dem Beweise selbst ersichtlich ist, für alle Körper, an welchen jedes Eck mit mehreren Ecken durch Kanten und ebenso jede Fläche durch eine Kante mit einer andern Fläche verbunden ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gilt auch obige Gleichung nicht, z. B. wenn man sich ein Polyeder im Innern eines andern vorstellt, so daß letzteres gleichsam ausgehöhlt erscheint, weil in diesem Falle die innern Grenzflächen mit den äußern nicht verbunden sind. Obiger Beweis ist nach dem Vorgange von Cauchy von Grunert gegeben; einen andern neuen, eigenthümlichen sehe man in „von Staudt's Geometrie der Lage" §. 49 u. f.

b) Die Anzahl W aller Winkel ist der doppelten Anzahl der Kanten gleich.

c) Es ist $K \geqq \frac{3}{2} F$; denn jede Fläche wird wenigstens von drei Seiten begrenzt, in welchem Falle $2K = 3F$ ist; in allen andern Fällen muß $2K > 3F$ sein.

d) Es ist $K \geqq \frac{3}{2} E$; denn jedes Eck wird von wenigstens drei Kanten bestimmt, in welchem Falle $2K = 3E$ ist; in allen andern Fällen muß $2K > 3F$ sein.

e) Es gibt nur fünf reguläre Körper, d. h. an welchen in jeder Ecke gleichviel Kanten zusammenstoßen, und an welchen jede Fläche ein reguläres Vieleck ist. Denn es sei das Vieleck ein reguläres nEck und in jedem Ecke mögen m Kanten zusammenstoßen, so ist $nF = 2K$ und $mE = 2K$. Substituirt man diese für K gefundenen Werthe in die in a) stehende Gleichung, so erhält man

$$E\,(m - 2) = 2F - 4;$$
$$F\,(n - 2) = 2E - 4,$$

woraus $$\frac{EF}{(F - 2)\,(E - 2)} = \frac{4}{(m - 2)\,(n - 2)}.$$

Da nun $(E - 2)\,(F - 2)$ immer kleiner als EF ist, so muß $(m - 2)\,(n - 2) < 4$ sein; weil ferner m und n ganze positive Zahlen sein müssen, so erhält man aus der Gleichung $(m - 2)\,(n - 2) = 1$ die Werthe $m = 3$, $n = 3$ und das Tetraeder als zugehörigen Körper. Aus der Gleichung $(m - 2)\,(n - 2) = 2$ folgen die Werthe $m = 4$, $n = 3$ und $m = 3$, $n = 4$. Den ersten beiden Werthen entspricht das Octaeder, den beiden letzten das Hexaeder. Aus der Gleichung $(m - 2)\,(n - 2) = 3$ entspringen endlich die Werthe $m = 5$, $n = 3$ und $m = 3$, $n = 5$, welche dem Ikosaeder und Dodekaeder entsprechen *).

*) Diese einfache Ableitung findet sich in v. Staudt's Geometrie der Lage. §. 49 und 50.

f) Wenn n Ebenen sich so schneiden, daß blos immer drei in einem und demselben Punkte und zwei in einer Kante sich schneiden, so erhält man als Anzahl aller begrenzten und unbegrenzten Räume

$$2n + \frac{(n+3)\ (n-1)\ (n-2)}{1 \quad 2 \quad 3}.$$

Denn 1 Ebene theilt den Raum in 2 Theile, zwei Ebenen theilen denselben in 4, drei Ebenen in 8, vier Ebenen in 15, fünf Ebenen in 26 Theile, wodurch man eine Reihe erhält, in welcher die dritten Differenzen constant sind. (Ein strenger Beweis gehört nicht hieher.) Ebenso findet man durch einfache Betrachtung, daß die Anzahl der unbegrenzten Raumtheile

$$n\ (n-1) + 2$$

und die Anzahl der begrenzten $= \frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1 \quad 2 \quad 3}$ ist.

---

22. Jedes Parallelepiped hat 6 Diagonalebenen, welche sich in einem Punkte schneiden. In demselben Punkte durchschneiden sich daher auch die vier Diagonalen desselben. In jeder der letztern durchschneiden sich drei Diagonalebenen.

23. Im Tetraeder durchschneiden sich in einem Punkte

a) die Ebenen, welche durch die Kanten und die Mitte der Gegenseite einer jeden gelegt sind;

b) die Halbirungsebenen der Winkel, welche von je zwei Seitenebenen gebildet werden;

c) die Lothe, welche in den Mittelpunkten der den einzelnen Dreiecken umschriebenen Kreise errichtet sind;

d) die Geraden, welche die Mitten je zweier Gegenkanten verbinden.

Beweis. ad a) Legt man durch eine Kante und die Mitte der Gegenkante eine Ebene, so sind die Durchschnitte derselben mit den an der letztern liegenden Dreiecken die

Mittellinien derselben, woraus sich der Satz leicht ergibt. Dieser Durchschnittspunkt ist der Schwerpunkt des Tetraeders.

ad b) Wenn ABCD das gegebene Tetraeder ist, so bestimmen die Halbirungsebenen, welche durch die Kanten AB, AC gehen, den Ort des Punktes, welcher von den Seiten ABC, ABD, ACD gleich weit entfernt ist. Jede andere Halbirungsebene, z. B. diejenige, welche durch DC geht, bestimmt durch ihren Durchschnitt mit jenem Orte einen Punkt, welcher von den vier Seitenebenen gleich weit entfernt ist. Jede durch diesen Punkt und eine der übrigen Kanten gelegte Ebene halbirt den zugehörigen Kantenwinkel, weshalb sämmtliche Halbirungsebenen durch denselben Punkt gehen müssen.

ad c) Je zwei Lothe, welche in den Mittelpunkten der den Dreiecken umbeschriebenen Kreise errichtet sind, liegen in einer Ebene, woraus der Satz sogleich folgt.

ad d) Der Beweis ergibt sich aus a). Der Durchschnittspunkt der genannten Linien fällt mit dem in a) gefundenen zusammen.

24. Verbindet man den Schwerpunkt einer Seitenfläche des Tetraeders mit der gegenüberliegenden Spitze, so liegt in dieser Geraden der Schwerpunkt des Tetraeders und das Stück derselben, welches zwischen dem Schwerpunkte des Tetraeders und der Spitze liegt, ist dreimal größer, als das übrige Stück.

Beweis. Fig. 188. Es sei im Tetraeder ABCD der Durchschnitt O der Linien DF, AG, welche aus den Ecken A und D nach den Schwerpunkten F und G der Dreiecke ABC und BCD gezogen sind, der Schwerpunkt desselben. Zieht man FG, so ist diese Gerade mit der Kante AD parallel, weil $AF = \frac{2}{3} AE$ und $DE = \frac{2}{3} DE$ ist. Folglich ist $AD : GF = DO : FO$; weil nun $AD = 3FG$ ist, so muß auch $DO = 3OF$ sein.

25. Es gibt acht Punkte, welche von den vier Seitenebenen eines Tetraeders gleich weit entfernt sind.

Beweis. Man denke sich die Seitenebenen erweitert und die äußern Keile (Nebenwinkel) ebenfalls halbirt, so erhält man zwölf Halbirungsebenen, von welchen sich (nach 23) immer drei in einer Geraden durchschneiden. In jeder dieser Halbirungsebenen liegen daher vier Gerade als geometrische Örter der Punkte, welche von den Seiten des Tetraeders gleich weit entfernt sind, folglich in zwei durch einerlei Kante gehenden Halbirungsebenen acht solche Gerade. Vier in einerlei Ebene liegende Gerade bilden aber ein Vierseit mit 6 Durchschnitten, von welchen zwei die Eckpunkte der zugehörigen Kante sind. Die übrigen vier sind die erwähnten Punkte. Da dieselben von den vier in der andern durch dieselbe Kante gehenden Halbirungsebene verschieden sein müssen, weil beide nur die Kante gemeinschaftlich haben und auf einander senkrecht stehen, so erhält man folglich acht solche Punkte. — Daß diese acht Punkte von den acht in einem andern Paar von Halbirungsebenen liegenden nicht verschieden sein können, leuchtet sogleich ein, weil leicht nachzuweisen ist, daß dann ein und derselbe Ebenenwinkel durch zwei verschiedene Ebenen halbirt werden könne. Siehe III, II, 29.

26. Wenn man im Tetraeder die Schwerpunkte der Seitenflächen durch Gerade verbindet, so entsteht wieder ein Tetraeder, dessen Seitenflächen den gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders ähnlich sind.

Beweis. Es sind die gegenüberliegenden Kanten beider Tetraeder mit einander parallel. Es ist daher auch das einbeschriebene Tetraeder der 27. Theil des umbeschriebenen.

27. Wird ein Tetraeder mit einer Ebene schief durchschnitten, so daß drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten geschnitten werden, so verhält sich das Tetraeder zum Abschnitte

wie das Produkt aus den drei Kanten zum Produkte der drei Abschnitte der Kanten.

Beweis. Fig. 189. Es werde vom Tetraeder ABCD die Kante AB in E, die Kanten AC und AD in F und G geschnitten. Denkt man sich aus E und B die Höhen auf ACD gefällt, so ist, wenn dieselben mit h und H bezeichnet werden:

Pyr. ABCD : Pyr. AEFG = △ ACD . H : △ AGF . h.

Weil nun △ ACD : △ AFG = AC . AD : AF . AG, so ist auch, weil noch

$$H : h = AB : AE;$$

Pyr. ABCD : Pyr. AEFG = AB . AC . AD : AE . AF . AG.

28. Wenn in einem Tetraeder ABCD drei Seiten ACD, ABD, BDC rechtwinkelige Dreiecke sind, so ist das Quadrat der vierten Dreiecksfläche der Summe der Quadrate der drei genannten Dreiecke gleich.

Beweis. Fig. 190. Man fälle aus C und D auf AB die Lothe CE und DE, so schneiden dieselben sich in einem Punkte E. Weil nun

$$\triangle ABC^2 = \tfrac{1}{4} AB^2 . CE^2 = \tfrac{1}{4} AB^2 . DE^2 + \tfrac{1}{4} AB^2 . CD^2$$
$$= \tfrac{1}{4} AB^2 . DE^2 + \tfrac{1}{4}(AD^2 + BD^2) CD^2$$ ist, so folgt:

$$\triangle ABC^2 = \triangle ABD^2 + \triangle ACD^2 + \triangle BCD^2.$$

Anmerkung. Ist das Dreieck ABD in D schiefwinkelig, während die beiden Dreiecke ADC und BDC rechtwinkelig und auf ABD senkrecht sind, so erhält man $\triangle ABC^2 = \triangle ABD^2 + \triangle ADC^2 + \triangle BCD^2 - 2 . \triangle ADC . \triangle BDC . \mathrm{Cos} . ADB.$

Beide Formeln sind offenbar mit bekannten geometrischen und trigonometrischen Ausdrücken verwandt.

29. Wenn man durch die Mitten von je drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten Ebenen legt, so wird aus dem Tetraeder ein Octaeder ausgeschnitten, welches die Hälfte des Tetraeders ist.

Der Beweis ergibt sich leicht aus Nr. 27.

30. Die vierfache Quadratsumme der Linien, welche die Mitten zweier Gegenkanten verbinden, ist der Quadratsumme aller Kanten gleich.

Der Beweis ergibt sich leicht aus I, 36.

31. Die neunfache Quadratsumme der vier Geraden, welche die Ecken mit den Schwerpunkten der Gegenseiten verbinden, ist der vierfachen Quadratsumme aller Kanten gleich.

32. Wenn über einem Parallelogramme ABCD eine Pyramide SABCD errichtet ist, dessen Seitenkanten gleich lang sind, und es wird dieselbe mit einer Ebene abcd beliebig schief geschnitten, so ist immer

$$\frac{1}{Sa} + \frac{1}{Sc} = \frac{1}{Sb} + \frac{1}{Sd} \ ^{*)}.$$

Der Beweis ergibt sich ebenfalls leicht aus Nr. 27.

33. Bezeichnet man mit r den Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel und mit r', r'', r''', r^{IV} die Radien der Kugeln, welche die äußern Seiten der Dreiecke berühren, ebenso mit h', h'', h''', h^{IV} die diesen Dreiecken zugehörigen Höhen des Tetraeders, so ist immer

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} + \frac{1}{r^{IV}} = 2\left(\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} + \frac{1}{h^{IV}}\right).$$

Vergleiche I, IV, 39.

34. Wird das Dreieck BCD als Grundfläche des Tetraeders ABCD betrachtet und man legt durch zwei Seitenkanten AB und AC Ebenen zur Grundfläche senkrecht, so muß, wenn diese zwei Ebenen auf den Gegenkanten CD und BD senkrecht stehen, auch die Ebene, welche durch die dritte Seitenkante AD zur Grundfläche senkrecht gelegt ist, auf der Gegenkante BC senkrecht stehen.

Beweis. Fig. 193. Weil ABE und ACF bezüglich auf CD und BD senkrecht stehen, so sind BE und CF Lothe

---

*) In Grunert's Archiv der Math. u. Phys. ist dieser Satz blos für das reguläre Octaeder aufgestellt.

des Dreiecks BCD. Zieht man daher durch den Durchschnittspunkt O derselben eine Gerade DG, so ist dieselbe ebenfalls ein Loth auf BC und durch AD und DG eine Ebene bestimmt, welche auf BC senkrecht steht.

In diesem Falle schneiden sich daher sämmtliche Höhen des Tetraeders in einem Punkte.

35. Schneiden sich die vier Höhen eines Tetraeders in einem einzigen Punkte, so liegt

a) dieser Punkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel in einer Geraden;

b) der Schwerpunkt in der Mitte zwischen dem Höhendurchschnitte und dem Mittelpunkte der umbeschriebenen Kugel.

Beweis. ad a) Fig. 11. Es sei ABC eine Seitenfläche des Tetraeders SABC, O der Fußpunkt der aus S gefällten Höhe, N der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und M der Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreises. Legt man durch S und OM eine Ebene, so enthält dieselbe also den Höhendurchschnitt, den Schwerpunkt des Tetraeders und den Mittelpunkt der dem letztern umbeschriebenen Kugel. Da alles dieses auch für eine andere Seitenfläche, z. B. SAB, gilt, so müssen die genannten Punkte im Durchschnitte zweier Ebenen, also in einer Geraden liegen.

Beweis. ad b) (Fig. 194.) Es sei S die Spitze des Tetraeders, SOM die Ebene, welche auf dem Dreiecke ABC senkrecht steht, und durch die Punkte O, N, M (siehe vorher) gelegt ist. Es sei ferner s der Höhendurchschnitt, p der Schwerpunkt, m der Mittelpunkt der dem Tetraeder umschriebenen Kugel. Dann ist, weil $pN = \frac{1}{4} SN$ und $MN = \frac{1}{3} MO$, wenn Nn mit Mm parallel gezogen wird:

$$\frac{pN}{Sp} = \frac{pn}{sp} = \frac{1}{3}, \text{ folglich auch}$$

$$\frac{sn}{ps} = \frac{4}{3}, \text{ weil nun auch}$$

$$\frac{sm}{sn} = \tfrac{3}{2}, \text{ so ist}$$

$$ps = \tfrac{1}{2} sm,$$

d. h. der Schwerpunkt liegt in der Mitte zwischen dem Höhendurchschnitte und dem Mittelpunkte der umbeschriebenen Kugel.

---

36. Zwei Kugeln schneiden sich immer in einer ebenen Curve (einem Kreise).

37. Alle Tangenten, welche aus einem außerhalb der Kugel liegenden Punkte an dieselbe gezogen werden, liegen auf der Oberfläche eines gemeinen Kegels und alle Berührungspunkte in einem Kreise. Der Punkt ist der Pol der Ebene dieses (kleinen) Kreises (Polarebene) und umgekehrt: Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Pol einer Ebene, welche in jenem Punkte, aus welchem die Tangenten an die Kugel gezogen sind, auf dem durch den Mittelpunkt des kleinen Kreises gehenden (verlängerten) Durchmesser senkrecht steht.

38. Durchschneidet eine Ebene eine Kugel, so ist ihr Durchschnitt mit einer jeden Geraden, welche durch den Pol dieser Ebene gezogen ist, durch die Durchschnittspunkte derselben Geraden mit der Kugeloberfläche harmonisch getrennt.

Liegt innerhalb der Kugeloberfläche ein Punkt, und ist durch denselben eine Gerade gezogen, so ist derselbe vom Durchschnitte der Geraden mit der Polarebene des Punktes durch die Durchschnitte derselben Geraden mit der Kugeloberfläche harmonisch getrennt.

Der Kugeldurchmesser, welcher durch den Pol geht, bestimmt mit der Geraden eine Ebene, welche einen größten Kreis an der Kugel ausschneidet, woraus die Sätze nach I, 103 u. f. f. folgen. (Der gegebene Punkt und der Mittelpunkt des kleinen Kreises oder der Durchschnitt des Kugeldurchmessers, welcher

durch den Punkt geht, mit der Polarebene desselben, heißen zugeordnete Pole.)

39. Wenn aus beliebig vielen Punkten einer Ebene, welche die Kugel nicht schneidet, tangirende Kegel um die Kugel beschrieben sind, so durchschneiden sich sämmtliche Polarebenen jener Punkte in einem einzigen Punkte, welcher innerhalb der Kugel liegt und der Pol jener Ebene ist.

(Zu einem unendlich fernen Punkte gehört ein größter Kreis, welcher ebenfalls durch jenen Punkt geht und auf der Geraden senkrecht steht, deren Richtung jenen Punkt bestimmt).

Wenn beliebig viele Ebenen die Kugel schneiden und sämmtlich durch einen und denselben Punkt gehen, so liegen die Spitzen aller Kegel, welche die Kugel in den durch jene Ebenen bestimmten kleinern Kreisen berühren, in einer Ebene, welche die Polarebene jenes Punktes ist.

(Jedem größten Kreise, welcher durch denselben Punkt geht, entspricht derjenige unendlich ferne Punkt der Ebene, welcher durch die Richtung des die Kugel in jenem Kreise tangirenden Cylinders bestimmt ist.)

40. Sind aus zwei Punkten tangirende Kegel um eine Kugel beschrieben, so durchschneiden sich die Polarebenen jener Punkte in einer Geraden. Diese und die Verbindungslinie jener beiden Punkte heißen zugeordnete Polarlinien. Jede Polarlinie steht auf der Ebene senkrecht, welche durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die andere Polarlinie bestimmt ist.

41. Schneiden sich zwei Kreise der Kugel, so entspricht ihrem Durchschnitte die Verbindungslinie der Pole jener Kreise als zugeordnete Polare.

Schneiden sich zwei Ebenen außerhalb der Kugel, so entspricht ihrem Durchschnitte die Verbindungslinie der Pole innerhalb der Kugel als zugeordnete Polare.

42. Durchschneiden sich drei Kreise der Kugel, so entspricht ihrem Durchschnitte als Pole die Ebene, welche durch die drei den Kreisen zugehörige Pole bestimmt ist, als Polarebene.

Durchschneiden sich drei Ebenen außerhalb der Kugel, so entspricht ihrem Durchschnitte als Pole der Kreis der Kugel, welcher durch die Pole der Ebenen bestimmt ist, als Polarebene.

43. Legt man durch die Mittelpunkte zweier nicht concentrischen Kugeln eine Ebene, so kann man nach den Sätzen der ebenen Geometrie die Ähnlichkeitspunkte der durch diese Ebenen bestimmten Kreise leicht finden, und zugleich erhellet, daß diese Punkte dieselben bleiben, wie man die beiden Kugeln mit einer Ebene durchschneiden mag, wenn dieselbe nur immer durch die Centrale gelegt ist. Diese Punkte heißen in Bezug auf die beiden Kugeln die (innern und äußern) Ähnlichkeitspunkte derselben.

44. Ist von zwei Kugeln der einen ein tangirender Kegel umbeschrieben, dessen Spitze in dem äußern Ähnlichkeitspunkte liegt, so berührt derselbe einfache Kegel auch die zweite Kugel. Liegt seine Spitze aber in dem innern Ähnlichkeitspunkte, so wird die eine Kugel von der Ergänzung des Kegels berührt, welcher der andern Kugel umbeschrieben ist (so daß in diesem Falle beide Kugeln von einem vollkommenen Kegel berührt werden).

45. Berühren sich zwei Kugeln von außen, so geht die vollkommene Kegelfläche, deren Spitze in dem innern Ähnlichkeitspunkte (dem Berührungspunkte) liegt, in die Ebene über, welche beide Kugeln berührt. Berühren sich aber zwei Kugeln von innen, so geht der einfache Kegel, dessen Spitze im gemeinschaftlichen Berührungspunkte liegt, in die Ebene über.

46. Liegen drei Kugeln ganz außer einander, so bilden die sechs Ähnlichkeitspunkte derselben die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, so daß die drei äußern in einer Geraden und jeder äußere mit den zwei ihm nicht zugeordneten innern in einer Geraden liegt.

47. Durch jede Seite dieses Vierseits lassen sich zwei Ebenen legen, welche die drei Kugeln berühren, so daß es überhaupt

8 verschiedene Berührungsebenen gibt, welche die drei Kugeln berühren. Schneiden sich zwei Kugeln, so gibt es nur vier, und schneidet eine Kugel die beiden andern, so sind nur zwei möglich.

48. Wenn vier Kugeln gegeben sind, von welchen keine die anderen schneidet, und keine innerhalb einer andern liegt, so erhellet aus 46, daß von den zwölf Ähnlichkeitspunkten immer sechs in einerlei Ebene liegen, so daß in jeder Ebene ein vollständiges Vierseit gebildet wird, dessen Ecken die sechs in dieser Ebene liegenden Ähnlichkeitspunkte sind. Man erhält auf diese Weise acht Ebenen, welche Ähnlichkeitsebenen sind.

49. Unter Potenzebene oder Radikalebene versteht man diejenige Ebene, von welcher aus jedem Punkte gleiche Tangenten an zwei Kreise gezogen werden können. Man erhält dieselbe, wenn durch die Centrallinie eine Ebene beliebig gelegt, die Radikalare der hierdurch erhaltenen größten Kreise bestimmt und durch dieselbe eine Ebene senkrecht zur Centrallinie gelegt wird.

50. Die Radikalebenen dreier Kugeln durchschneiden sich in einer Geraden, welche senkrecht auf der Ebene steht, welche durch die Mittelpunkte der drei Kugeln gelegt ist. Hieraus folgt:

Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln, welche sich in vier Geraden schneiden, durchschneiden sich in einem Punkte (dem Radikalcentrum).

Anmerkung. Dieselben Betrachtungen können leicht auf Kegel und Cylinder ausgedehnt werden.

51. Wenn ein Kegel mit einer Kugel einerlei Axe hat, so ist der Durchschnitt eine ebene Kurve, nemlich ein Kreis.

52. Geht eine Kugel durch zwei feste Punkte, und berührt beständig eine Ebene, so ist der Ort des Berührungspunktes ein Kreis.

Anhang.

Da man in der Anwendung der Algebra auf Stereometrie oft in den Fall versetzt wird, die Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden zu müssen, so seien die nöthigsten hier zusammengestellt.

A. Auflösung des rechtwinkeligen Dreiecks.

Es bezeichne A, B, C die Winkel und a, b, c die Gegenseiten, so daß A der rechte Winkel ist.

Es ist $\text{Cos. } b = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Cos. } c}$; $\text{Cos. } c = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Cos. } b}$; $\text{Cotang. } B = \text{Cos. } a \text{ Tang. } C$; $\text{Cotang. } C = \text{Cos. } a \text{ Tang. } B$;
$\text{Sin. } C = \frac{\text{Cos. } B}{\text{Cos. } b} = \frac{\text{Sin. } c}{\text{Sin. } a}$; $\text{Cos. } C = \text{Cotang. } a \text{ Tang. } b$;
$\text{Sin. } c = \text{Cotang. } B \text{ Tang. } b$.

B. Zur Auflösung des sphärischen schiefwinkeligen Dreiecks dienen hauptsächlich folgende Formeln:

1) $$\begin{cases} \text{Sin. } a \text{ Sin. } B = \text{Sin. } b \text{ Sin. } A \\ \text{Sin. } a \text{ Sin. } C = \text{Sin. } c \text{ Sin. } A \\ \text{Sin. } b \text{ Sin. } C = \text{Sin. } c \text{ Sin. } B \end{cases}$$

2) $$\text{Cos. } a = \text{Cos. } b \text{ Cos. } c + \text{Sin. } b \text{ Sin. } c \text{ Cos. } A$$
$$\text{Cos. } b = \text{Cos. } a \text{ Cos. } c + \text{Sin. } a \text{ Sin. } c \text{ Cos. } B$$
$$\text{Cos. } c = \text{Cos. } a \text{ Cos. } b + \text{Sin. } a \text{ Sin. } b \text{ Cos. } C$$
$$\text{Cos. } A = - \text{Cos. } B \text{ Cos. } C + \text{Sin. } B \text{ Sin. } C \text{ Cos. } a$$
$$\text{Cos. } B = - \text{Cos. } A \text{ Cos. } C + \text{Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Cos. } b$$
$$\text{Cos. } C = - \text{Cos. } A \text{ Cos. } B + \text{Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Cos. } c$$

3) $$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ Sin. } \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c}}$$
$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ Sin. } \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } a \text{ Sin. } c}}$$
$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+c-b) \text{ Sin. } \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } a \text{ Sin. } b}}$$

und anolog

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ Sin. } \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } a \text{ Sin. } b}} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{Cos. } \frac{1}{2}(A+B+C) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\text{Cos. } \frac{1}{2}(A+B+C) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } C}}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\text{Cos. } \frac{1}{2}(A+B+C) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } B}}$$

und analog

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(A+B-C) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}}$$

u. s. w.

$$4) \begin{cases} \text{Cos. } \frac{1}{2}a \text{ Cos. } \frac{1}{2}(B+C) = \text{Sin. } \frac{1}{2}A \text{ Cos. } \frac{1}{2}(b+c) \\ \text{Cos. } \frac{1}{2}a \text{ Sin. } \frac{1}{2}(B+C) = \text{Cos. } \frac{1}{2}A \text{ Cos. } \frac{1}{2}(b-c) \\ \text{Sin. } \frac{1}{2}a \text{ Cos. } \frac{1}{2}(B-C) = \text{Sin. } \frac{1}{2}A \text{ Sin. } \frac{1}{2}(b+c) \\ \text{Sin. } \frac{1}{2}a \text{ Sin. } \frac{1}{2}(B-C) = \text{Cos. } \frac{1}{2}A \text{ Sin. } \frac{1}{2}(b-c) \end{cases}$$

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}c \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}c \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(a+b) \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{Cotg. } \tfrac{1}{2}C \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(a+b) \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{Cotg. } \tfrac{1}{2}C \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(a-b)$$

Aufgaben.

1. Den Punkt zu finden, welcher von einem gegebenen Punkte eine bestimmte Entfernung hat.

2. Den Punkt zu finden, welcher von zwei festen Punkten gleiche Entfernung hat.

3. Den Punkt zu finden, welcher von einer Geraden eine gegebene Entfernung hat.

4. Den Punkt zu finden, welcher von einer Ebene eine gegebene Entfernung hat.

5. Den Punkt zu finden, welcher von zwei parallelen Ebenen gleiche Entfernung hat.

6. Den Punkt zu finden, welcher von zwei sich schneidenden Ebenen

a) gleiche Entfernung hat;
b) von jeder einen gegebenen Abstand hat (4 A.);
c) welcher von drei Punkten gleichen Abstand hat.

7. Den Punkt zu finden, welcher von drei sich schneidenden Ebenen gleiche Entfernung hat. (Die Ebenen dürfen nicht durch einerlei Kante gehen.)

8. Eine Gerade zu finden, welche von einem Punkte eine gegebene Entfernung hat.

9. Eine Gerade zu finden, welche von einer Geraden eine gegebene Entfernung hat.

10. Eine Gerade zu finden, welche von einer Ebene eine gegebene Entfernung hat.

11. Eine Ebene zu finden, welche von zwei parallelen Ebenen gleiche Entfernung hat.

12. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche zu einer gegebenen Geraden senkrecht ist.

Auflösung. Lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und fälle in derselben vom Punkte auf die Gerade ein Loth, lege durch die Gerade eine zweite Ebene, errichte im Fußpunkte des Lothes auf der Geraden in letzterer Ebene ein Loth, und lege durch beide Lothe eine Ebene.

13. Eine Ebene zu finden, welche von zwei sich nicht schneidenden Geraden gleiche Entfernung hat.

Auflösung. Lege durch einen beliebigen Punkt der einen Geraden eine Parallele mit der zweiten Geraden, so ist durch jene beiden Linien eine Ebene bestimmt, welche mit der letztern parallel ist. Aus einem beliebigen Punkte der zweiten fälle auf die Ebene ein Loth, halbire dasselbe und durch den Halbirungspunkt lege eine Ebene parallel zur erstern Ebene.

14. Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei andere gegebene Gerade, die nicht in einerlei Ebene liegen, schneidet.

Auflösung. Man lege durch den Punkt und die eine Gerade eine Ebene, suche den Durchschnitt der Ebene mit der zweiten Geraden und verbinde letzteren mit dem gegebenen Punkte.

15. Eine Gerade zu ziehen, welche drei Gerade, von denen keine zwei in einerlei Ebene liegen, schneidet.

Auflösung. Man lege durch einen beliebigen Punkt der ersten Geraden und durch die zweite eine Ebene, suche den Durchschnitt dieser Ebene mit der dritten Geraden und verbinde letzteren mit dem angenommenen Punkte.

16. Eine Gerade zu ziehen, welche zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade senkrecht schneidet.

Auflösung. Lege durch einen beliebigen Punkt der einen Geraden eine Parallele zur zweiten Geraden, so ist eine Ebene bestimmt, welche mit letzterer parallel ist. Fälle aus einem beliebigen Punkte der zweiten Geraden ein Loth auf diese Ebene, so ist eine zweite Ebene bestimmt, welche auf ersterer senkrecht steht, und die erstere Gerade in einem Punkte schneidet; errichtet man in diesem Punkte auf ersterer Ebene ein Loth, so schneidet dieses die zweite Gerade und ist die verlangte Linie.

17. Zwischen drei sich nicht schneidenden und nicht parallelen Geraden das Parallelepiped zu construiren, welches durch diese drei Geraden bestimmt ist.

Auflösung. Es seien A, B, C die drei gegebenen Geraden. Lege durch A eine Ebene mit B und durch B eine Ebene mit A parallel. Lege ebenso durch A eine Ebene mit C parallel und eine andere durch C mit A parallel und suche die Durchschnitte dieser Ebenen. Lege ebenso durch B eine Ebene mit C und durch C eine Ebene mit B parallel, so ist, wenn man auch die Durchschnitte dieser Ebenen mit den obigen bestimmt, das Parallelepiped bestimmt. — Zugleich ist klar, daß durch drei sich nicht schneidende

und nicht in einerlei Ebene liegende Gerade nur ein einziges Parallelepiped bestimmt ist.

18. In einem Vierecke, dessen vier Seiten nicht sämmtlich in einerlei Ebene liegen, ist durch zwei Punkte zweier Gegenseiten eine Gerade gelegt; durch einen Punkt einer Nebenseite eine andere Gerade zu ziehen, welche zugleich die erstere Verbindungslinie und die Gegenseite schneidet.

Auflösung. Fig. 191. Es sei ABCD das (windschiefe) Viereck und durch die Punkte E und F der Seiten AB, CD die Gerade EF gezogen. Soll nun aus dem Punkte G der Seite AD eine Gerade gezogen werden, welche die Linie EF und die Gegenseite BC schneidet, so ziehe die Diagonale AC und GF, welche AC in N schneidet. Ziehe EN, welche BC in H schneidet, dann GH, so schneidet GH die EF in M.

19. Ein Tetraeder mit einer Ebene so zu durchschneiden, daß der Schnitt ein Parallelogramm wird.

Auflösung. Wenn ABCD das gegebene Tetraeder, so ziehe in der Ebene ABC mit AB eine Parallele EF, welche BC in E und AC in F schneidet; durch EF lege eine Ebene EFGH mit CD parallel, welche AD in G und BD in H schneidet, so ist EFGH das verlangte Parallelogramm.

20. Eine Ebene und ein Punkt außerhalb derselben sind gegeben. Durch den Punkt seien beliebig viele Gerade gezogen, welche die Ebene schneiden. Man soll einen zweiten Punkt finden, aus welchem die Projektionen der Geraden in der Ebene mit einer gegebenen Richtung parallel erscheinen.

Auflösung. Ziehe in der Ebene eine Gerade, welche die gegebene Richtung hat, und mit ihr durch den Punkt, durch welche die Geraden gezogen sind, eine Parallele. Projicirt man aus irgend einem Punkte dieser letztern Linie jene Geraden, so werden die Projektionen in der gegebenen Ebene parallel erscheinen.

21. Ein Parallelstrahlenbündel (ein System von Geraden, welche unter sich parallel sind) und eine denselben schneidende Ebene seien gegeben. Einen Punkt zu finden, aus welchem dieselben auf die gegebene Ebene so projicirt werden, daß die Projektionen sich in einem gegebenen Punkte schneiden.

Auflösung. Ziehe durch den gegebenen Punkt eine Gerade, welche mit den Strahlen des Parallelstrahlenbündels parallel ist. Projicirt man aus irgend einem Punkte dieser Geraden den Bündel, so werden die Projektionen sich in dem gegebenen Punkte schneiden.

22. Ein beliebiges ebenes Viereck ist der Größe und Gestalt nach gegeben; einen Punkt zu suchen, aus welchem dasselbe als Parallelogramm erscheint (projicirt wird).

Auflösung. Durchschneide die Projektionsebene mit einer andern Ebene beliebig und construire in letzterer ein Viereck, welches mit dem gegebenen Vierecke congruent ist, jedoch so, daß die Durchschnitte der Gegenseiten in einer Geraden liegen, welche mit der Projektionsebene parallel ist. Legt man durch diese Gerade eine Ebene, welche zur Projektionsebene ebenfalls parallel ist, und projicirt aus einem beliebigen dritten Punkte dieser Ebene das Viereck, so wird die Projektion desselben ein Parallelogramm sein.

23. Ein Dreieck ist der Größe und Gestalt nach gegeben; jedoch so, daß weder seine Ebene, noch eine Seite mit der Projektionsebene parallel ist; einen Punkt zu finden, aus welchem dasselbe als gleichseitiges Dreieck erscheint.

Auflösung. Durch einen Eckpunkt A des Dreiecks lege eine Ebene parallel mit der Projektionsebene. Durch die Gegenseite BC des Dreiecks lege eine Ebene, welche die parallele Ebene in MN schneidet, und construire in letzterer ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Seite in MN und Gegenecke in A liegt. Verbindet man die Eckpunkte des Dreiecks ABC mit den homologen Ecken des gleichseitigen Dreiecks und verlängert die Verbindungslinien bis zu ihrem

Durchschnitte in S, so läßt sich aus S das Dreieck ABC als gleichseitiges Dreieck projiciren.

24. Einem Würfel ein reguläres Tetraeder umzubeschreiben.

Auflösung. Ziehe aus einem und demselben Eckpunkte des Würfels drei Diagonalen in den drei an derselben Ecke zusammenstoßenden Seitenquadraten und verbinde die Endpunkte derselben durch die zugehörigen Diagonalen in den drei übrigen Seitenquadraten, so erhält man hierdurch die sechs Kanten des Tetraeders.

25. Ein Octaeder in einen Würfel zu beschreiben.

Auflösung. Suche die Mitten der sechs Seitenflächen des Würfels, so sind dieselben zugleich die sechs Eckpunkte des Octaeders.

26. Ein Octaeder in ein Tetraeder zu beschreiben.

Auflösung. Halbire die Kanten des Tetraeders, so sind die sechs Halbirungspunkte derselben die sechs Eckpunkte des Octaeders.

27. In ein Dodekaeder ein Ikosaeder zu beschreiben.

Auflösung. Suche die Mitten der zwölf Flächen des Dodekaeders, so sind dieselben die zwölf Eckpunkte des Ikosaeders.

28. In ein Ikosaeder ein Dodekaeder zu beschreiben.

Auflösung. Suche die Mitten der zwanzig Flächen des Ikosaeders, so sind diese zwanzig Punkte die zwanzig Eckpunkte des Dodekaeders.

Anmerkung. Man bemerke hierbei für die fünf regulären Körper, daß dieselben dem Reciprocitätsgesetze unterworfen sind. Es hat nemlich

das reguläre Vierflach (Tetraeder) 4 Flächen, 4 Ecken, 6 Kanten;

das reguläre Viereck (Tetraeder) 4 Flächen, 4 Ecken, 6 Kanten;

d. h. das Tetraeder ist sich selbst reciprok. In Bezug auf die vier übrigen regulären Körper enthält aber

das reguläre Sechsflach (Hexaeder) 6 Flächen, 8 Ecken, 12 Kanten;
das reguläre Sechseck (Octaeder) 8 Flächen, 6 Ecken, 12 Kanten;
und ebenso
das reguläre Zwölfflach (Dodekaeder) 12 Flächen, 20 Ecken, 30 Kanten;
das reguläre Zwölfeck (Ikosaeder) 20 Flächen, 12 Ecken, 30 Kanten;
woraus erhellet, daß Hexaeder und Octaeder und ebenso Dodekaeder und Ikosaeder reciproke Körper sind. Vergleiche hiermit ihre Bestimmung aus III, 21, e.

29. Die Höhen eines (regulären oder irregulären) Tetraeders aus den sechs Kanten zu finden.

Auflösung. Fig. 192. Es sei ABCD das Tetraeder. Beschreibe über der Seite AC des Dreiecks ABC das Dreieck ACD, welches an derselben Kante liegt, und ebenso über AB das an dieser Kante liegende Dreieck ABD′. Fälle aus D auf AC das Loth DF und aus D′ auf AB das Loth DO, welches DF in O schneidet. Errichte in O auf FO das Loth OD″ und durchschneide dasselbe aus F mit FD in D″, so ist OD″ das verlangte zur Dreiecksfläche ABC gehörige Loth des Tetraeders.

30. Durch einen auf dem Mantel eines gemeinen Cylinders oder Kegels gegebenen Punkt eine Berührungsebene zu legen.

Auflösung. Lege durch den gegebenen Punkt eine Ebene zur Axe des Cylinders (oder Kegels) senkrecht, so ist der Schnitt ein Kreis. In dieser Ebene ziehe durch den gegebenen Punkt eine Tangente an den Kreis, so ist durch dieselbe und durch die Seite des Cylinders oder Kegels, welche den gegebenen Punkt enthält, eine Ebene bestimmt, welche die gegebene Fläche berührt.

31. Durch einen außerhalb eines Cylinders oder Kegels liegenden Punkt eine Berührungsebene an denselben zu legen.

32. Parallel mit einer Geraden, welche nicht mit einer Seite des Cylinders oder Kegels parallel ist, eine Ebene zu legen, welche den Cylinder oder Kegel berührt.

Auflösung. Soll an den Cylinder eine Berührungsebene gelegt werden, so ziehe durch irgend einen Punkt der gegebenen Geraden eine zweite Gerade, welche mit der Seite (oder Are) des Cylinders parallel ist. Durch diese beiden Linien ist eine Ebene bestimmt; legt man durch die Are des Cylinders auf dieselbe eine Ebene senkrecht, so wird der Cylinder in einer Seite durchschnitten, durch welche man (30) eine Berührungsebene legen kann. — Ist statt des Cylinders ein Kegel gegeben, so ziehe durch den Mittelpunkt der Kegelfläche eine Gerade, welche zur gegebenen Geraden parallel ist, wodurch die Aufgabe auf 31 zurückgeführt ist.

33. An eine Kugel eine Berührungsebene zu legen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Auflösung. Lege durch den Punkt beliebig zwei größte Kreise und ziehe an dieselben durch den Berührungspunkt Tangenten, so kann durch dieselben eine Ebene gelegt werden, welche zugleich die Kugel berührt.

34. Durch eine Gerade außerhalb einer Kugel eine Ebene zu legen, welche die Kugel berührt.

Auflösung. Lege durch die Gerade und den Mittelpunkt eine Ebene, welche einen größten Kreis ausschneidet, suche den Pol der Geraden und ziehe durch denselben die der gegebenen Geraden zugeordnete Polare. Die Durchschnitte dieser Linie mit der Kugel bestimmen zwei Punkte, durch welche die Berührungsebenen gelegt werden können.

35. Um ein Tetraeder eine Kugel zu beschreiben.

Auflösung. Suche zu zwei Seitenflächen die Mittelpunkte der umbeschriebenen Kreise und errichte in diesen zu dem

zugehörigen Dreiecke Lothe, so werden sich diese in einem Punkte schneiden, welches der gesuchte Mittelpunkt ist.

36. In ein Tetraeder eine Kugel zu beschreiben.

Auflösung. Halbire drei Winkel des Tetraeders, welche nicht alle drei an einerlei Ecke liegen, so durchschneiden sich dieselben in einem Punkte. — Auf dieselbe Weise werden die Mittelpunkte der übrigen Kugeln bestimmt.

37. An drei Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.

Auflösung. Lege durch die Mittelpunkte eine Ebene, welche an den Kugeln größte Kreise ausschneidet. Suche die Ähnlichkeitsaxen derselben, so können durch dieselben acht Berührungsebenen der Kugeln construirt werden.

38. An zwei Kegel von einerlei Mittelpunkt eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Auflösung. Beschreibe in jeden Kegel eine Kugel, welche von demselben berührt wird, suche die Ähnlichkeitspunkte derselben und verbinde dieselben mit dem Mittelpunkte der Kegel. Durch diese Geraden lege Ebenen, welche die eine Kugel berühren, so berühren dieselben auch die beiden Kegel.

IV.

Anwendung der Algebra auf Stereometrie.

1. Den Inhalt eines Würfels zu finden, dessen Seite 4′ 8″ ist.

Antwort. $110^{c\prime}, 592^{c\prime\prime}$ Dezimal-M. oder $101^{c\prime}, 1088^{c\prime\prime}$ Duodez.-M.

2. Wie groß ist die Seite eines Würfels, welcher dem Inhalte nach doppelt so groß ist, als ein anderer, dessen Seite 6′ ist?

Antwort. 7,5595′.

3. Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen Oberfläche noch einmal so groß ist, als die Oberfläche des vorhin gegebenen Würfels?

Antwort. 8,485'.

4. Wie groß ist die Diagonale des Würfels, dessen Seite $= a$ ist?

Antwort. $a\sqrt{3}$.

5. Wie groß ist die Diagonalfläche desselben?

Antwort. $a^2\sqrt{2}$.

6. Ein Würfel ist durch eine Ebene, welche mit vier parallelen Kanten ebenfalls parallel ist, so geschnitten, daß die Stücke des einen Paares der durchschnittenen Kanten sich wie $m : n$ und die des andern Paares an der Gegenfläche wie $m' : n'$ verhalten. Wie verhalten sich die beiden Theile des Würfels?

Antwort. Wie $2mm' + mn' + m'n$ zu $2nn' + mn' + m'n$.

7. Wie verhalten sich aber die beiden Theile des Würfels, wenn dieselbe Ebene zwei an einander stoßende Kanten die eine wie $m : n$, die andere wie $m' : n'$ theilt?

Antwort. Wie mm' zu $mm' + 2m'n + 2mn' + 2nn'$.

8. Wenn im Würfel ABCDEFGH die gegenüberliegenden Ecken mit A und G, B und H, C und E, D und F bezeichnet werden, so ist immer, wenn irgend ein Punkt O mit sämmtlichen acht Ecken des Würfels durch die Geraden OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH verbunden wird:

$$OA^2 + OC^2 + OF^2 + OH^2 = OB^2 + OD^2 + OE^2 + OG^2.$$

Diese Relation gilt auch noch, wenn statt des Würfels ein Parallelepiped mit drei auf einander senkrecht stehenden Kanten gegeben ist.

9. Wenn aus einem Würfel ein Octaeder so ausgeschnitten wird, daß die Schnitte durch die Mitten zweier einander gegenüberliegender Quadrate und durch die Mitten der die beiden Quadrate verbindenden parallelen Kanten geführt werden;

den Inhalt dieses Octaeders aus der Kante a des Würfels zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $K = \frac{1}{3} a^3$.

10. Den Inhalt K des dem Würfel einbeschriebenen regulären Octaeders aus der Kante a des Würfels zu bestimmen.

Antwort. $K = \frac{1}{6} a^3$.

11. Den Inhalt K des dem Würfel einbeschriebenen regulären Tetraeders aus der Kante a des Würfels zu bestimmen.

Antwort. $K = \frac{1}{3} a^3$.

12. Einen Würfel parallel mit vier Kanten so zu schneiden, daß der Schnitt einer Deckfläche des Würfels gleich und das abgeschnittene Stück der mte Theil des Würfels ist.

Antwort. Die Schnittfläche steht auf einer Seitenfläche des Würfels senkrecht, und die Länge des einen Paares der durchschnittenen Kanten ist durch

$$x = \frac{1}{2} a \left(\sqrt{\frac{m+4}{m}} + \sqrt{\frac{m-4}{m}} \right)$$

und die Länge des andern Paares durch

$$y = \frac{1}{2} a \left(\sqrt{\frac{m+4}{m}} - \sqrt{\frac{m-4}{m}} \right)$$

ausgedrückt.

Wie groß ist das größte Stück, welches vom Würfel abgeschnitten werden kann?

13. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped hat zur Grundfläche ein Quadrat, die Höhe desselben ist mmal größer, als die Seite des Quadrats; die Oberfläche und den Inhalt desselben zu finden.

Antwort. Bezeichnet man mit a die Seite der Grundfläche, so ist Oberfläche $F = 2a^2 (2m + 1)$ und Inhalt $K = ma^3$.

14. Die drei auf einander senkrecht stehenden Kanten eines Parallelepipeds stehen im Verhältnisse von 1 : 2 : 3 und die Oberfläche F desselben sei 100 □ Fuß; die einzelnen Kanten und den Inhalt zu bestimmen.

Antwort. Es sind die einzelnen Kanten 2,132; 4,264; 6,396 und der Inhalt 58,145 K. Fuß.

15. Es verhalten sich dieselben Kanten (wie vorher) wie 1 : 2 : 3 und der Inhalt sei 100 K. Fuß; die einzelnen Kanten zu bestimmen.

Antwort. Die Kanten haben die Längen 2,554365; 5,10873; 7,663095.

16. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped zu bilden, welches ein Quadrat zur Grundfläche hat, dessen Inhalt 140 K. Fuß und dessen Grund- und Deckfläche zusammen den vier Seitenflächen gleich sind.

Antwort. Es ist die Seite des Quadrats = 6,5421, die Höhe des Parallelepipeds = 3,2711.

17. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped, dessen Seitenkanten auf den Grundebenen senkrecht stehen, werde mit einer Ebene so geschnitten, daß die Abschnitte dreier derselben, von einerlei Grundfläche an gerechnet, die Längen m, n, o haben; in welcher Höhe (von derselben Grundfläche an gerechnet) wird die ~~dritte~~ 4 Seite durchschnitten und wie groß ist die Schnittfläche?

Antwort. Die Länge der vierten Kante, welche der Länge n gegenüberliegt, ist durch $x = m + o - n$ ausgedrückt. Die Schnittfläche ist ein Parallelogramm und der Inhalt desselben bestimmt sich durch die Seiten $\sqrt{a^2 + (n-m)^2}$, $\sqrt{b^2 + (n-o)^2}$ und die Diagonalen $\sqrt{a^2 + b^2 + (o-m)^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + (2n - m - o)^2}$, wo a und b die Kanten an der Grundfläche sind und aus den Endpunkten von b die Senkrechten n und o auslaufen.

18. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped werde, wie vorhin, schief geschnitten; den Inhalt des abgeschnittenen Stückes zu bestimmen, wenn zwei an einander stoßende Kanten der Grundfläche 7,34 und 8,56; und drei der Seitenkanten 5,45; 6,8; 7,43 Fuß lang sind.

Antwort. 389,555.

19. Im rechtwinkeligen Parallelepiped ist durch zwei Punkte, welche in zwei Gegenkanten liegen, und von denen der eine von einem Endpunkte der Kante, in welcher er liegt, um m Fuß und der andere von der Gegenecke um n Fuß entfernt ist, eine Gerade gezogen; die Länge derselben zu bestimmen.

Antwort. Liegen die beiden Punkte in zwei Gegenkanten, deren Länge = a ist, so ist, wenn die Längen der andern Kanten durch b und c ausgedrückt sind, die Gerade bestimmt durch $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + (m+n)^2 - 2a(m+n)}$.

20. Im schiefwinkeligen Parallelepiped sei der Inhalt 126 K. Fuß, eine Kante an der Grundfläche 6, die andere 5,2 und der Zwischenwinkel 43° 20′; die Höhe des Parallelepipeds zu bestimmen.

Antwort. 5,8849 Fuß.

21. Den Inhalt K eines Parallelepipeds aus einer Seitenfläche F, der dritten Kante a und dem Winkel φ, unter welchem dieselbe gegen die Fläche F geneigt ist, zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $K = Fa \text{ Sin. } \varphi$.

22. Den Inhalt eines Parallelepipeds zu bestimmen:

a) aus den drei an einander stoßenden Kanten a, b, c, den Winkeln α, β, welche die Kanten b, c und a, c mit einander bilden und dem Neigungswinkel C der Ebene des Parallelogramms ac gegen die Ebene des Parallelogramms bc;

b) aus den drei Kanten abc und den drei Winkeln α, β, γ, welche sie mit einander bilden.

Antwort. Man erhält ad a) $K = abc \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } C$;

ad b) $K =$

$$2abc\sqrt{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

Anmerkung. Bezeichnet man den Neigungswinkel der Seitenfläche ac mit ab mit A u. s. w., so erhält man noch folgende Relationen:

$$K = \sqrt{FF'F'' \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Sin. } \beta} = \frac{FF'F'' \text{ Sin. } A}{abc \text{ Sin. } \alpha}$$

$$= \frac{hh'h'' \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } \alpha},$$

wo F, F′, F″ die drei an einander stoßenden Parallelogramme und hh′h″ die ihnen zugehörigen Höhen (je eine auf eine Kante gefällt) bedeuten.

23. In einem Parallelepiped seien die Kanten a = 24, b = 21, c = 14; der Winkel α, welchen die Kanten b und c mit einander bilden, sei 104° 20′, ebenso Winkel β zwischen a und c = 51° 32′ und Winkel γ zwischen a und b = 70°; die übrigen Stücke und den körperlichen Inhalt des Parallelepipeds zu bestimmen.

Antwort. Es ist K = 4049,897; Fläche ab = 473,605; Fläche ac = 263,078; Fläche bc = 284,848; W. A = 51° 16′ 13″,5; W. B = 39° 4′ 53″,3; W. C = 49° 9′ 59″,5.

24. In einem Prisma sei die Grundfläche F = 742 Q. Fuß, eine Seitenkante 12 Fuß, der Neigungswinkel einer anliegenden Seitenfläche gegen die Grundfläche 68° und der Winkel in dieser Seitenfläche, welchen die gegebene Kante mit der anliegenden bildet, 84°; die Höhe und den Inhalt des Prisma's zu finden.

Antwort. Es ist die Höhe = 11,065 .. und K = 8210,42 K. Fuß.

25. In einem schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma seien die drei Seitenkanten 12, 13, 14 Fuß, die Fläche eines Schnittes, welcher zu den drei Seitenkanten senkrecht geführt ist, sei 44,2 Quadratfuß; den körperlichen Inhalt des Prisma's zu finden.

Antwort. K = 1723,800 K. Fuß.

26. Die Grundfläche eines Prisma's sei ein Dreieck, dessen Seiten a, b, c bezüglich 14, 16, 22 Zoll lang sind, die Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Kanten a und b seien 65° und 70°; die Größe eines senkrechten Schnittes zu bestimmen.

Antwort. Die drei Seiten x, y, z des Schnittes, welche bezüglich mit a, b, c in einerlei Ebene liegen, sind 12,6883; 15,0351; 21,9956; woraus die Fläche berechnet werden kann.

27. Eine 18 Fuß hohe senkrechte Säule, deren Grundfläche ein reguläres Sechseck ist, enthält 142 K. Fuß 844 K. Zoll (Duodez. Maaß); wie groß ist die Seite des regulären Sechseckes?

Antwort. 1 Fuß 8 Zoll 11 Linien.

28. Ein senkrechtes Prisma hat zur Grundfläche ein Parallelogramm, dessen Seiten a und b den Winkel φ einschließen, während die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen. In der Seitenfläche, welche durch die Kante b geht, ist eine Gerade c gezogen und durch dieselbe eine Ebene gelegt, welche ein Rechteck ausschneidet; die zweite Seite x desselben zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $x = \sqrt{\frac{a^2 (c^2 - b^2 \text{ Sin. }^2\varphi)}{c^2 - b^2}}$.

29. Die vier mit einander parallelen Kanten eines parallelepiped'schen Raumes so zu schneiden, daß die Schnittfläche ein Quadrat wird.

Antwort. Wenn a und b zwei an einander stoßende Durchschnittlinien sind, welche durch eine zu den gegebenen vier Kanten senkrechte Ebene erzeugt werden, so ist, wenn a und b den Winkel φ einschließen, die Seite des verlangten Quadrates durch

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4\,a^2 b^2 \text{ Sin. }^2\varphi}}$$

ausgedrückt.

30. Ein dreiseitiges Prisma so zu schneiden, daß der Schnitt ein gleichseitiges Dreieck wird.

Antwort. Wenn die drei Seiten des Dreiecks, welches entsteht, wenn das Prisma durch eine zu seinen drei Seitenkanten senkrechte Ebene geschnitten wird, mit a, b, c

bezeichnet werden, so ist die Seite x des verlangten Dreiecks ausgedrückt durch $x^2 =$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2(a^2-b^2)+b^2(b^2-c^2)+c^2(c^2-a^2)}.$$

31. Eine gegebene dreiseitige Pyramide parallel mit einer Grenzfläche so zu schneiden, daß der Schnitt von gegebener Größe F ist.

Antwort. Bezeichnet man die Fläche, mit welcher der Schnitt parallel geführt wird, mit G, und irgend eine Seitenkante, welche einen Eckpunkt derselben mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet, mit a, so ist x bestimmt durch

$$x = a\sqrt{\frac{F}{G}}.$$

32. Den Inhalt K einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide zu bestimmen aus den beiden parallelen, einander ähnlichen Deckflächen G, g und ihrem senkrechten Abstande h.

Antwort. Man erhält $K = \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg})$.

Anmerkung. Vorstehender Ausdruck gilt nicht allein für die abgestumpfte dreiseitige Pyramide, sondern auch allgemein für jede andere abgestumpfte Pyramide, deren Grund- und Deckfläche ein nEck ist. Denn weil beide genannte Grenzflächen, welche ebenfalls mit G und g bezeichnet sein mögen, ähnliche Figuren sind, so läßt sich die abgestumpfte Pyramide in (n — 2) dreiseitige abgestumpfte Pyramiden zerlegen. Es seien nun G_1, g_1; G_2, g_2; G_3, g_3; ... G_{n-2}, g_{n-2} die homologen Grund- und Deckflächen der einzelnen dreiseitigen Pyramiden, so erhält man sogleich für den Inhalt K der nseitigen Pyramide den Ausdruck

$$K = (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_{n-2}) +$$
$$(g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_{n-2}) +$$
$$(\sqrt{G_1 g_1} + \sqrt{G_2 g_2} + \sqrt{G_3 g_3} + \ldots + \sqrt{G_{n-2} g_{n-2}}).$$

Es ist daher blos zu zeigen, daß

$$\sqrt{G_1 g_1} + \sqrt{G_2 g_2} + \ldots + \sqrt{G_{n-2} g_{n-2}} = \sqrt{Gg} \text{ ist.}$$

Weil aber $\frac{G_1}{g_1} = \frac{G_2}{g_2} = \frac{G_3}{g_3} = \ldots = \frac{G_{n-2}}{g_{n-2}}$ und folglich $\sqrt{\frac{G_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{G_2}{g_2}} = \sqrt{\frac{G_3}{g_3}} \ldots = \sqrt{\frac{G_{n-2}}{g_{n-2}}}$ $= \sqrt{\frac{G}{g}}$ ist, so ist auch

$$(g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_{n-2}) \sqrt{\frac{G}{g}} =$$

$$\sqrt{G_1 g_1} + \sqrt{G_2 g_2} + \sqrt{G_3 g_3} + \ldots + \sqrt{G_{n-2} g_{n-2}}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist aber offenbar $= \sqrt{Gg}$.

33. In welcher Entfernung x von der größern Grundfläche G einer abgestumpften Pyramide, deren Deckfläche g ist, wird die Spitze der vollendeten Pyramide liegen, wenn der senkrechte Abstand der beiden Flächen G und g die Länge h hat?

Antwort. Es ist $x = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$.

34. Drei aus einerlei Spitze auslaufende Kanten einer dreiseitigen Pyramide haben die Längen a, b, c; auf den Kanten a und b seien die Längen a_1, b_1 abgeschnitten und durch die Endpunkte der letztern eine Ebene gelegt, welche den m ten Theil der Pyramide abschneidet. Welche Länge x schneidet dieselbe Ebene auf der Kante c, von derselben Spitze aus gerechnet, ab?

Antwort. Es ist $x = \frac{abc}{m a_1 b_1}$.

35. Wenn drei Kanten einer dreiseitigen Pyramide durch eine Ebene parallel mit der vierten Dreiecksfläche so durchschnitten werden, daß die Abschnitte jeder Kante, von der gemeinschaftlichen Spitze an gerechnet, sich wie m zu n verhalten; wie verhält sich die abgestumpfte Pyramide p_1 zum obern Ergänzungskörper p_2?

Antwort. Es ist $\frac{p_1}{p_2} = \frac{3n}{m} + \frac{3n^2}{m^2} + \frac{n^3}{m^3}$.

36. Wenn aber die abgestumpfte Pyramide p_1 zum obern Ergänzungskörper p_2 sich verhalten soll wie m zu n, in welchem Verhältniß wird jede Kante getheilt?

Antwort. Die den genannten Pyramiden zugehörigen Theile x und y einer und derselben Kante geben das Verhältniß

$$\frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{m+n}{n}} - 1.$$

37. Eine Pyramide, deren Grundfläche G und zugehörige Höhe h ist, in drei gleiche Theile zu theilen, so daß die Schnittflächen mit G parallel sind.

Antwort. Die Entfernungen der Schnittflächen von der der Grundfläche G gegenüberliegenden Spitze sind bestimmt durch $h\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $h\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

38. Aus einer Pyramide, deren Grundfläche G und Höhe H ist, durch zwei mit G parallele Ebenen ein Stück auszuschneiden, dessen Inhalt K und Höhe h ist.

Antwort. Die Entfernung x der kleinern Deckfläche der ausgeschnittenen abgestumpften Pyramide ist bestimmt durch

$$x = -\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{12KH^2}{Gh} - \tfrac{1}{3}h^2}.$$

39. Von einer abgestumpften Pyramide durch eine mit den beiden Deckflächen parallele Ebene den mten Theil abzuschneiden.

Antwort. Die Größe x der Schnittfläche ist bestimmt durch

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{G^3} + (m-1)\sqrt{g^3}}{m}\right)^2}.$$

40. In welchem Abstande x von der kleinern Deckfläche g einer abgestumpften Pyramide muß eine zu ihr parallele Ebene geführt werden, damit der Schnitt der mte Theil der Grundfläche G sei, wenn die Entfernung von G und g mit h bezeichnet ist?

Antwort. Man erhält $x = \dfrac{h\left(\sqrt{\frac{1}{m}G} - \sqrt{g}\right)}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$.

41. In welcher Entfernung x von der Spitze einer Pyramide muß ein zur Grundfläche G paralleler Schnitt geführt werden, damit sich eine Pyramide bilden läßt, welche dem Inhalte nach die Hälfte der gegebenen Pyramide ist, und von welcher der Schnitt die Grundfläche ist und die Spitze in der Grundfläche G der gegebenen Pyramide liegt?

Antwort. Wenn h die Höhe der gegebenen Pyramide ist, so bestimmt sich x durch die Gleichung

$$x^3 - x^2 h + \tfrac{1}{2} h^3 = 0.$$

42. Eine Pyramide ABCD ist mit einer Ebene parallel zur Kante AB so geschnitten, daß, von A und B aus gerechnet, die Abschnitte der Kanten AD und BE sich wie m zu n und die Abschnitte der Kanten AC und BC wie p zu q sich verhalten; das Verhältniß des an AB liegenden Abschnittes zur ganzen Pyramide zu finden.

Antwort. Es ist das Verhältniß des Abschnittes zur Pyramide $= \frac{mp}{(m+n)(p+q)}\left(1 + \frac{n}{m+n} + \frac{q}{p+q}\right)$.

43. Wenn dieselbe Pyramide mit einer Ebene parallel zu den zwei Kanten AB und CD so geschnitten wird, daß die Abschnitte der vier Kanten AD, AC, BD, BC (von A und B aus gerechnet) sich wie m zu n verhalten; das Verhältniß der beiden Theile der Pyramide zu finden.

Antwort. Wenn P_1 und P_2 die an AB und CD liegenden Theile der Pyramide sind, so ist

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m^3 + 3m^2 n}{3mn^2 + n^3}.$$

Legt man daher durch die Mitten der Kanten AD, AC, BD, BC eine Ebene, so wird die Pyramide halbirt.

44. Da in der Aufgabe 42 die Schnittebene mit der Kante CD nicht parallel ist, so ist die Frage, wie groß die Entfernung x des Durchschnittspunktes der Kante CD mit der Schnittebene vom Punkte D ist?

Antwort. Man erhält $x = \frac{np \cdot CD}{mq - np}$.

45. Den körperlichen Inhalt einer dreiseitigen regulären Pyramide ABCD aus der Kante a zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $K = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

46. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind; die Seitenkanten seien sämmtlich einander gleich und jede habe die Länge d; den Inhalt der Pyramide aus den Kanten zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $K =$

$$\frac{1}{12}\sqrt{2a^2b^2d^2+2a^2c^2d^2+2b^2c^2d^2-a^2b^2c^2-a^4d^2-b^4d^2-c^4d^2}.$$

47. Aus den sechs Kanten einer Pyramide die Höhe aus einer Spitze auf die Gegenseite zu finden.

Auflösung. Es sei die Pyramide MABC gegeben, in welcher die aus der Spitze M auf die Ebene des Dreiecks ABC gefällte Höhe $MD = x$ zu bestimmen ist. Verbindet man den Fußpunkt D mit den Punkten A, B, C, so erhält man ein vollständiges Viereck mit seinen Diagonalen. Für diese sechs Linien besteht die Seite 208 angeführte Relation. Bezeichnet man daher die Kanten der Pyramide AB, BC, AC, MA, MB, MC mit a, b, g, m, n, o und die Linien AD, BD, CD mit d, f, c, so braucht man nur, weil $d^2 = m^2 - x^2$, $f^2 = n^2 - x^2$, $c^2 = o^2 - x^2$ ist, in der angeführten Relation für d^2, f^2, c^2 ihre Werthe zu substituiren und dann x zu bestimmen. Man erhält:

$$x^2 (2a^2b^2 + 2a^2g^2 + 2b^2g^2 - a^4 - b^4 - g^4) = a^2b^2m^2 + a^2b^2o^2 + a^2g^2n^2 + a^2g^2o^2 + b^2g^2n^2 + b^2g^2m^2 + m^2n^2b^2 + m^2n^2g^2 + m^2o^2b^2 + m^2o^2a^2 + n^2o^2a^2 + n^2o^2g^2 - b^2n^2o^2 - g^2m^2o^2 - m^2n^2a^2 - a^2b^2g^2 - a^2o^4 - a^4o^2 - b^2m^4 - b^4m^2 - g^2n^4 - g^4n^2.$$

48. Aus den sechs Kanten a, b, g, m, n, o des Tetraeders den körperlichen Inhalt K derselben zu finden.

Antwort. Man erhält K =

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} a^2b^2m^2 + a^2b^2o^2 + a^2g^2n^2 + a^2g^2o^2 + \\ b^2g^2n^2 + b^2g^2m^2 + m^2n^2b^2 + m^2n^2g^2 + \\ m^2o^2b^2 + m^2o^2a^2 + n^2o^2a^2 + n^2o^2g^2 - \\ b^2n^2o^2 - g^2m^2o^2 - m^2n^2a^2 - a^2b^2g^2 - \\ a^2o^4 - a^4o^2 - b^2m^4 - b^4m^2 - g^2n^4 \\ - g^4n^2. \end{array}\right\}}$$

49. Die Halbmesser der acht Kugeln zu finden, welche die vier Seitenflächen des Tetraeders berühren.

Antwort. Von den acht Berührungskugeln ist eine in das Tetraeder beschrieben und wenn die Seitenflächen derselben mit Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 und der körperliche Inhalt mit K bezeichnet worden, so ist der Halbmesser

$$r = \frac{3K}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}.$$

Vier andere berühren die äußern Seiten der Dreiecke, und ihre Radien r_1, r_2, r_3, r_4 sind bestimmt durch

$$r_1 = \frac{3K}{\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_1};\ r_2 = \frac{3K}{\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_2};$$

$$r_3 = \frac{3K}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_3};\ r_4 = \frac{3K}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4},$$

wenn die Kugel vom Radius r_1 die Dreiecksfläche Δ_1 berührt u. s. w.

Von den drei übrigen liegt je eine in einem der beiden vierseitigen Räume, welche an zwei gegenüberliegenden Kanten durch die Erweiterungen der Dreiecksflächen entstehen, und ihre Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind bestimmt durch

$$\varrho_1 = \pm \frac{3K}{(\Delta_1 + \Delta_2) - (\Delta_3 + \Delta_4)};$$

$$\varrho_2 = \pm \frac{3K}{(\Delta_1 + \Delta_3) - (\Delta_2 + \Delta_4)};$$

$$\varrho_3 = \pm \frac{3K}{(\Delta_1 + \Delta_4) - (\Delta_2 + \Delta_3)},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die

Summe des ersten Paares von Dreiecksflächen in den Nennern größer oder kleiner, als das zweite Paar ist. Eine solche Kugel liegt immer in dem Raume an derjenigen von zwei Gegenkanten, welche zugleich gemeinschaftliche Seite der kleinern Dreiecke ist.

50. Den Radius der Kugel zu finden, welche durch die vier Eckpunkte eines Tetraeders geht.

Antwort. Denkt man sich das Tetraeder in vier Pyramiden zerlegt, deren Spitzen im Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel liegen und deren Grundflächen die vier Dreiecke des Tetraeders sind, so findet man mit Hilfe von 46 und 47 den Radius R der umbeschriebenen Kugel ausgedrückt durch R =

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4o^4+b^4m^4+g^4n^4-a^2b^2m^2o^2-a^2g^2n^2o^2-b^2g^2m^2n^2}{\left\{\begin{matrix}a^4o^2+o^4a^2+b^4m^2+m^4b^2+g^4n^2+\\ n^4g^2+a^2b^2g^2+a^2m^2n^2+b^2n^2o^2+\\ g^2m^2o^2-a^2b^2o^2-a^2b^2m^2-b^2g^2m^2\\ -b^2g^2n^2-a^2g^2n^2-a^2g^2o^2-m^2n^2b^2\\ -m^2n^2g^2-n^2o^2a^2-n^2o^2g^2-m^2o^2b^2\\ -m^2o^2a^2\end{matrix}\right\}}}$$

wo, wie oben, a, b, g die Kanten an der Grundfläche und o, m, n die ihnen gegenüberliegenden Seitenkanten sind.

51. Aus den drei Kanten a, b, c und den zugehörigen drei Dreiecken, welche in einerlei Ecke zusammenlaufen, den Inhalt des Tetraeders zu finden.

Antwort. Bezeichnet man mit A, B, C die drei Dreiecke, welche an der gemeinschaftlichen Spitze zusammenlaufen, und an derselben von den Kanten b und c, c und a, a und b begrenzt werden, so ist K =

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{4a^2A^2+4b^2B^2+4c^2C^2-2a^2b^2c^2+2\sqrt{(a^2c^2-4B^2)(a^2b^2-4C^2)(b^2c^2-4A^2)}}.$$

52. Der Durchschnittspunkt der drei Mittellinien eines Dreiecks ist bekanntlich der Schwerpunkt des Dreiecks. Werden

die Schwerpunkte der vier Dreiecke eines Tetraeders mit den Gegenspitzen verbunden, so durchschneiden sich die vier Mittellinien in einem Punkte. Die Länge einer solchen Linie und die Entfernung des Schwerpunkts von jeder Spitze zu finden.

Antwort. Es seien a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks, nach dessen Schwerpunkte von der Gegenspitze eine Mittellinie x gezogen ist, d, e, f seien die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Kanten, so ist

$$x^2 = \tfrac{1}{3}(d^2 + e^2 + f^2) - \tfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

und daher die Entfernung y des Schwerpunktes von der Ecke, welche dem Dreiecke a, b, c gegenüberliegt, bestimmt durch

$$y^2 = \tfrac{3}{16}(d^2 + e^2 + f^2) - \tfrac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2).$$

53. Durch dieselben sechs Kanten des Tetraeders die Geraden auszudrücken, welche die Mitten je zweier Gegenkanten verbinden.

Antwort. Wenn mit x die Gerade bezeichnet wird, welche die Mitten der Gegenkanten a und d verbindet, so erhält man

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 + e^2 + f^2 - a^2 - d^2}{4}.$$

Anmerkung. Bezeichnet man die beiden andern Verbindungslinien mit y und z, so erhält man die Relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

54. Ein Obelisk ist von zwei parallelen Rechtecken und vier Trapezen begrenzt; die parallelen Seiten beider Rechtecke seien a, m und b, n; den körperlichen Inhalt desselben zu finden.

Antwort. Man erhält $k = \frac{h}{6}(2am + 2bn + an + bm)$.

55. Die Oberfläche und den Inhalt des regulären Octaeders aus der Kante a zu finden.

Antwort. Es ist Oberfläche $O = 2a^2\sqrt{3}$; $K = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.

56. Die Oberfläche und den Inhalt des regulären Dodekaeders aus der Kante a zu finden.

Antwort. Man erhält Oberfläche $O = 3a^2 \sqrt{5}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$; $K = \frac{1}{4}a^3 (15 + 7\sqrt{5})$.

57. Die Oberfläche und den Inhalt des regulären Ikosaeders aus der Kante a zu finden.

Antwort. Man erhält $O = 5a^2 \sqrt{3}$; $K = \frac{5}{12}a^3 (3 + \sqrt{5})$.

58. Es gibt drei Kugeln von einerlei Mittelpunkt, welche sich um und in jeden der fünf regulären Körper beschreiben lassen, von welchen die eine durch sämmtliche Ecken geht, die andere sämmtliche Kanten und die dritte sämmtliche Grenzflächen berührt. Aus der Kante a die Längen ihrer Radien zu finden.

Antwort. Man bezeichne die Radien der den regulären Körpern um- und einbeschriebenen Kugeln mit R und ϱ, den Radius der die Kanten berührenden Kugel mit r, so ist

a) für das Tetraeder:
$R = \frac{1}{4}a\sqrt{6}$; $r = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$; $\varrho = \frac{1}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}}$;

b) für das Hexaeder:
$R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $\varrho = \frac{1}{2}a$;

c) für das Oktaeder:
$R = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $r = \frac{1}{2}a$; $\varrho = a\sqrt{\frac{1}{6}}$;

d) für das Dodekaeder:
$R = \frac{1}{4}a\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$; $r = \frac{1}{4}a\sqrt{4 + 6\sqrt{5}}$;

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}};$$

e) für das Ikosaeder:

$$R = \frac{1}{4}a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};\ r = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2}};$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}.$$

59. Den Inhalt und die Oberfläche der regulären Körper aus den Radien der umbeschriebenen Kugeln zu rechnen.

Antwort. Man erhält a) für das Tetraeder:
$O = \frac{8}{3}R^2\sqrt{3}$; $K = \frac{8}{27}R^3\sqrt{3}$;

b) für das Hexaeder:
$O = 8R^2$; $K = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3}$;

c) für das Octaeder:
$O = 4R^2 \sqrt{3}$; $K = \frac{4}{3} R^3$;

d) für das Dodekaeder:
$O = 2R^2 \sqrt{10} \sqrt{5 - \sqrt{5}}$; $K = \frac{2R^3 (5 + \sqrt{5}) \sqrt{3}}{9}$;

e) für das Ikosaeder:
$O = 2R^2 \sqrt{3} (5 - \sqrt{5})$; $K = \frac{2}{3} R^3 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

60. Ein gemeiner Cylinder soll 28,5 Kubikfuß bei $4\frac{3}{4}$ Fuß Höhe (Duod. M.) fassen; wie groß ist der Radius der Grundfläche?

Antwort. 1 Fuß 4 Zoll $6\frac{5}{6}$ Linien c.

61. Wie viel Kubikfuß enthält ein Cylinder, dessen Höhe 6 Fuß, und in welchem der Radius der Grundfläche = 0,9 Fuß ist, mehr, als ein senkrechtes Parallelepiped von gleicher Höhe, in welchem die Grundfläche ein Quadrat ist, welches der Grundfläche des Cylinders einbeschrieben werden kann?

Antwort. 5,548 K. Fuß.

62. Es soll ein Cylinder verfertigt werden, welcher ebenso viel Kubikfuß faßt, als seine Gesammtoberfläche Quadratfuße enthält; wie hoch muß derselbe werden, und wie viel wird er Kubikfuß fassen, wenn der Durchmesser der Grundfläche 5 Fuß ist?

Antwort. 10 Fuß hoch und K = 196,3494 . . K. Fuß.

63. Durch die Axe eines senkrechten Cylinders seien zwei Ebenen unter einem Winkel von 40° gelegt; den Cylinderausschnitt zu bestimmen, wenn der Halbmesser der Grundfläche 8 Zoll und die Höhe des Cylinders 2 Fuß 3 Zoll (Duod. M.) ist.

Antwort. 603,186 K. Zoll.

64. Von einem Cylinder, dessen Grundfläche 5 Quadratfuß und Höhe 4 Fuß ist, ist durch eine Ebene parallel mit der Axe ein Stück abgeschnitten, so daß jede Durchschnittlinie mit den Grundflächen 9 Zoll lang ist; den Inhalt des abgeschnittenen Stückes zu bestimmen.

Antwort. K = 277,5 K. Zoll (Duod. M.).

65. Ein Cylinder vom Radius r ist mit einer Ebene schief durchschnitten; die Länge der kleinsten Seite am Cylinder sei a, die der gegenüberliegenden größten sei b, den körperlichen Inhalt zu bestimmen.

Antwort. Man erhält $\frac{1}{2} r^2 \pi (a + b)$.

66. Den körperlichen Inhalt eines senkrechten Kegels, dessen Durchmesser 3 Fuß 5 Zoll und Höhe 4 Fuß 7 Zoll (Duod. M.) ist, zu bestimmen.

Antwort. 14 K. Fuß 13 K. Zoll.

67. Wie groß ist der Winkel des Kreisausschnittes, welchen man durch Complanation des Mantels eines Kegels erhält, dessen Höhe dem Radius der Grundfläche gleich ist?

Antwort. 254 Grad 33 Minuten 30 Secunden.

68. In einen Kegel einen Cylinder zu beschreiben, welcher $\frac{4}{9}$ desselben sei.

Antwort. Wenn der Radius der Grundfläche des Kegels mit r, so ist der Radius x der Grundfläche des Cylinders bestimmt durch $x = \frac{2}{3} r$.

69. Die Höhe x des Kegels zu bestimmen, dessen Mantel dem Mantel des umbeschriebenen Cylinders gleich ist.

Antwort. Bezeichnet r den Radius der Grundflächen, so ist
$$x = \frac{1}{3} r \sqrt{3}.$$

70. Die Höhe x des abgestumpften Kegels zu finden, dessen Mantel dem Mantel des umbeschriebenen Cylinders gleich ist, wenn die Radien der beiden Deckflächen des abgestumpften Kegels mit R und r bezeichnet werden.

Antwort. Man erhält $x = (R + r) \sqrt{\frac{R - r}{3R + r}}$.

71. Einen abgestumpften Kegel parallel mit seinen Deckflächen zu halbiren.

Antwort. Wenn R und r die Radien der beiden Deckflächen des Kegels sind, so ist der Abstand x der Schnittfläche von der kleinern Deckfläche, deren Radius r ist, bestimmt

durch $x = \frac{h}{R - r}\left(\sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}} - r\right)$ und der Radius y der Schnittfläche durch $y = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$.

72. In welchem Abstande x von der Spitze muß ein Kegel durchschnitten werden, damit der Cylinder, welcher über der Schnittfläche bei gleicher Höhe mit dem Kegel, diesem dem Inhalte nach gleich ist?

Antwort. Wenn die Höhe des Kegels mit h bezeichnet wird, so ist x bestimmt durch die Proportion: $\frac{1}{3}h : x = x : h$.

73. Wie groß ist der Fehler, wenn man den abgestumpften Kegel als einen gleich hohen Cylinder betrachten würde, dessen Grundfläche mit dem arithmetischen Mittel der Radien R und r der Deckflächen des Kegels beschrieben ist?

Antwort. Der abgestumpfte Kegel ist immer größer, als der oben angegebene Cylinder und man vernachlässigt bei dieser Berechnung einen Kegel von derselben Höhe, dessen Grundfläche mit der halben Differenz der Radien R und r beschrieben ist. Der Fehler wird daher desto größer, je größer das Verhältniß der Radien R und r ist. Würde man statt des abgestumpften Kegels einen Cylinder berechnen, dessen Grundfläche dem arithmetischen Mittel der Grund- und Deckfläche gleich ist, so ist der Inhalt dieses Cylinders um $\frac{1}{6}(R - r)^2 h\pi$ zu groß, wo h die gemeinschaftliche Höhe des Cylinders und Kegels ist. Aus beiden Berechnungen folgt, daß der dreifache Inhalt des abgestumpften Kegels der Summe des doppelten Cylinders erster Art und eines Cylinders zweiter Art gleich ist.

74. Wie groß ist der Inhalt K eines Kegels, dessen complanirter Mantel einen Kreisausschnitt erzeugt, in welchem der Radius ϱ und der Mittelpunktswinkel φ ist?

Antwort. Bezeichnet man den Quotienten $\frac{\varphi}{360}$ mit Cos. ψ, so ist $K = \frac{1}{3}\varrho^3 \pi \text{ Cos.}^2 \psi \text{ Sin. } \psi$.

Anmerkung. Es folgt hieraus sogleich, daß ψ der Neigungswinkel der Seite des Kegels gegen die Grundfläche ist. Es kann daher immer der Winkel, welchen der complanirte Mantel erzeugt, direkt sehr leicht gefunden werden, und umgekehrt u. s. w. durch die Gleichung $\frac{\varphi}{360} = \text{Cos. } \psi$.

75. Den körperlichen Inhalt und die Oberfläche einer Kugel aus dem Radius und Durchmesser zu bestimmen.

Antwort. Es ist $K = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi$;

Oberfläche $O = 4 r^2 \pi = d^2 \pi$.

76. Wie dick ist eine hohle Kugel von 10″ Durchmesser (an der äußern Fläche genommen) wenn dieselbe 200 Kubikzoll (Dezimalmaaß) enthält?

Antwort. 1,37217 Zoll.

77. Welche Kugel hat eine Oberfläche von 1000 Quadratzoll und wie groß ist der Inhalt?

Antwort. Der Radius ist 8,9206 und der Inhalt = 2973,54.

78. Eine Kugel soll so getheilt werden, daß an der Oberfläche vier gleiche Theile gebildet werden.

Antwort. Weil eine Kugelzone ausgedrückt ist durch $2 h r \pi$, wo h den Abstand zweier paralleler Deckflächen bezeichnet, so braucht man nur einen Durchmesser in vier gleiche Theile zu theilen und durch die Theilpunkte Ebenen zu legen, welche auf demselben Durchmesser senkrecht stehen.

79. Den Inhalt eines Kugelabschnittes zu bestimmen, wenn die Schnittebene von ihrem Pole auf der Kugeloberfläche den Abstand h hat.

Antwort. Man erhält $J = h (r h \pi - \frac{1}{3} h^2 \pi)$.

(Wie läßt sich diese Formel in Worte aussprechen?)

80. Den körperlichen Inhalt eines von zwei Parallelkreisen und der zwischenliegenden Zone begrenzten Kugelabschnittes zu finden; wenn a und b die Radien jener Deckflächen und h ihren Abstand bezeichnet.

Antwort. Man erhält: $J = \frac{h\pi}{2} (a^2 + b^2 + \frac{1}{3} h^2)$.

6.
7.
21.
30.

6.

de la Haye

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Jüngling, Georg G.

Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie nebst den Grundzügen der neueren Geometrie

Regensburg 1848

Math.p. 244 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082108-6